(exercice 4.5)

ψ, C quelconques (mais « fixés ») à ceci près que $\psi(S) \subset C^\times$

$$0_A \notin S$$

$$\begin{tikzcd} S \subset A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & & C \\ B \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

$a \mapsto \varphi(a) = a = \frac{a}{1_A}$

$B = \left\{ \frac{a}{s} \right\}_{\substack{a \in A \\ s \in S}} \subset \mathbb{K}$

? θ tel que $\theta \circ \varphi = \psi$

(et θ uniquement déterminé par ces propriétés)

$\varphi(S) \subset B^\times$

$s \in S \quad s \times \underbrace{\left(\frac{1}{s}\right)}_{\in B} = 1$ par définition de B

« Analyse » Soit θ vérifiant $\theta \circ \varphi = \psi$

$\theta : B \longrightarrow C$

Soit $b \in B$ Écrivons $b = \frac{a}{s}$ $\quad a \in A$, $s \in S$

$$\begin{aligned} \theta(b) = \theta\left(\frac{a}{s}\right) &= \theta\left(a \times \frac{1}{s}\right) \\ &= \theta(a) \times \theta\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \theta(\varphi(a)) \times \theta(s)^{-1} \\ &= (\theta \circ \varphi)(a) \times \theta(\varphi(s))^{-1} \\ &= \underbrace{\psi(a)}_{\text{connu !}} \times \underbrace{\psi(s)}_{\text{connu !}}^{-1} \end{aligned}$$

l'image par θ de $\frac{a}{s}$ est entièrement déterminée par ψ

Ce calcul montre qu'il existe $\boxed{\text{au plus}}$ un morphisme $\theta : B \to C$ tel que $\psi = \theta \circ \varphi$

Pourquoi « au plus » ?

$\theta : \frac{a}{s} \longmapsto \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

③ est un morphisme d'anneaux ?

② $\psi = \theta \circ \varphi$?

① θ est bien défini ?

(l'écriture $\frac{a}{s}$ n'est pas unique)

① Soit $a \in A$, $s \in S$ $\quad a' \in A$, $s' \in S$ tel que $\boxed{\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}}$

Il faut montrer

$\psi(a) \times \psi(s)^{-1} = \psi(a') \times \psi(s')^{-1}$

$$\boxed{\begin{aligned} H : A \times S &\longrightarrow C \\ (a, s) &\longmapsto \psi(a) \times \psi(s)^{-1} \end{aligned}}$$

Rq $\psi(S) \subset C^\times$ donc pour tout $s \in S$ $\psi(s)^{-1}$ a un sens

? $\boxed{\text{Si } \boxed{\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}}, \text{ alors } \boxed{H(a,s) = H(a',s')}}$ $(*)$

$\theta : \frac{a}{s} \longmapsto \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow \theta\left(\frac{a}{s}\right) = \theta\left(\frac{a'}{s'}\right)$

ceci n'a de sens que si θ est bien défini, c'est-à-dire si $(*)$ est vrai

Pourquoi "au plus" ?

$\Theta : \frac{a}{s} \longmapsto \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

③ est un morphisme d'anneaux ?

② $\psi = \Theta \circ \varphi$?

① Θ est bien défini ?

(l'écriture $\frac{a}{s}$ n'est pas unique)

① Soit $a \in A$, $s \in S$, $a' \in A$, $s' \in S$ tel que $\boxed{\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}}$. Il faut montrer

$\psi(a) \times \psi(s)^{-1} = \psi(a') \times \psi(s')^{-1}$

Comme $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, on a $as' = a's$

donc $\psi(as') = \psi(a's)$

donc $\psi(a)\psi(s') = \psi(a')\psi(s)$

or $\psi(s) \in C^\times$ $\psi(s') \in C^\times$ on multiplie par $\psi(s')^{-1} \times \psi(s)^{-1}$

On en déduit $\psi(a) \times \psi(s)^{-1} = \psi(a') \times \psi(s')^{-1}$ OK

<u>Aparté</u> "On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a + 2b \longmapsto a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$"

f n'est pas bien définie ! Si $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a + 2b = a' + 2b'$ on n'a pas nécessairement $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2$

② $\psi \overset{?}{=} \Theta \circ \varphi$ Soit $a \in A$

$\psi : A \to C$

$\Theta \circ \varphi : A \to C$

On a $\Theta(\varphi(a)) = \Theta(a) = \Theta\left(\frac{a}{1_A}\right) = \psi(a) \times (\psi(1_A))^{-1}$

$= \psi(a) \times 1_C^{-1}$

$= \psi(a)$

Donc $\Theta \circ \varphi = \psi$

③ Montrons que $\Theta : B \to C$ est un morphisme d'anneaux

Soit $b_1, b_2 \in B$ On écrit $b_1 = \frac{a_1}{s_1}$ $b_2 = \frac{a_2}{s_2}$ $a_1, a_2 \in A$, $s_1, s_2 \in S$

$\Theta(b_1 + b_2) = \Theta\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) = \Theta\left(\frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}\right) = \psi(a_1 s_2 + a_2 s_1) \times \psi(s_1 s_2)^{-1}$

$= [\psi(a_1)\psi(s_2) + \psi(a_2)\psi(s_1)] \times \psi(s_1)^{-1}\psi(s_2)^{-1}$

$= \psi(a_1) \times \psi(s_2) \times \psi(s_1)^{-1} \times \psi(s_2)^{-1} + \psi(a_2)\psi(s_1)\psi(s_1)^{-1}\psi(s_2)^{-1}$

$= \psi(a_1) \times \psi(s_1)^{-1} + \psi(a_2)\psi(s_2)^{-1} = \Theta(b_1) + \Theta(b_2)$

③ Montrons que $\theta : B \to C$ est un morphisme d'anneaux

Soit $b_1, b_2 \in B$. On écrit $b_1 = \frac{a_1}{s_1}$ $\quad b_2 = \frac{a_2}{s_2}$ $\quad a_1, a_2 \in A$, $s_1, s_2 \in S$

$$\theta(b_1 + b_2) = \theta\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) = \theta\left(\frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}\right) = \psi(a_1 s_2 + a_2 s_1) \times \psi(s_1 s_2)^{-1}$$

$$= [\psi(a_1)\psi(s_2) + \psi(a_2)\psi(s_1)] \times \psi(s_1)^{-1}\psi(s_2)^{-1}$$

$$= \psi(a_1) \times \psi(s_2) \times \psi(s_1)^{-1} \times \psi(s_2)^{-1} + \psi(a_2)\psi(s_1)\psi(s_1)^{-1}\psi(s_2)^{-1}$$

$$= \psi(a_1) \times \psi(s_1)^{-1} + \psi(a_2)\psi(s_2)^{-1} = \theta(b_1) + \theta(b_2)$$

donc θ est un morphisme de groupes

$$\theta(b_1 \times b_2) = \theta\left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2}\right) = \theta\left(\frac{a_1 \times a_2}{s_1 \times s_2}\right) = \psi(a_1 \times a_2) \times \psi(s_1 \times s_2)^{-1}$$

$$= \psi(a_1) \times \psi(a_2) \times \psi(s_1)^{-1} \times \psi(s_2)^{-1}$$

$$= \left(\psi(a_1) \times \psi(s_1)^{-1}\right) \times \left(\psi(a_2) \times \psi(s_2)^{-1}\right)$$

$$= \theta(b_1) \times \theta(b_2)$$

$$\theta(1_B) = \theta\left(\frac{1_A}{1_A}\right) = \psi(1_A) \times \psi(1_A)^{-1} = 1_C \times 1_C^{-1}$$

$$= 1_C$$

Donc θ est un morphisme d'anneaux.

Ceci conclut la démonstration du fait que « $B = S^{-1}A$ »