A anneau

S partie multiplicative $\left(\forall s \in S, \forall t \in S \quad s \times t \in S\right)$

$1_A \in S$ ou $S \neq \emptyset$

$$A \xrightarrow{\varphi} \underbrace{S^{-1}A}$$

morphisme de localisation

Tous les éléments de S deviennent inversibles dans $S^{-1}A$

$\forall s \in S, \ \varphi(s) \in (S^{-1}A)^\times$

+ $(S^{-1}A)$ φ est en un sens le plus petit possible

Exemple $A = \mathbb{Z}$ $\quad S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \varphi(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \subset \mathbb{R}^\times$$
$$a \longmapsto a$$

« trop gros »

Si $0_A \in S$ alors $S^{-1}A = \{0\}$

$\varphi : A \to S^{-1}A$ $\quad \underset{\overset{\shortparallel}{0_{S^{-1}A}}}{\varphi(0_A)} \in (S^{-1}A)^\times$ donc $0_{S^{-1}A} \in (S^{-1}A)^\times$

donc $S^{-1}A = \{0\}$

Rq Soit $S \subset A$. On peut avoir envie de localiser par rapport à S sans que S soit multiplicative. Exemple $a \in A$ $\quad S = \{a\}$

On va localiser par rapport à $\tilde{S}$ = la plus petite partie multiplicative de A qui contient S

Exemple $S = \{a\}$ $\quad \tilde{S} = \{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$a \in A$

⚠ Même si S ne contient pas 0_A, $\tilde{S}$ peut contenir 0_A

Exemple $S = A \setminus \{0\}$ avec A non intègre alors $0_A \in \tilde{S}$

$S = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\qquad [2]_4 \in S$ donc $\underset{\overset{\shortparallel}{[0]_4}}{[2]_4^2} \in \tilde{S}$

$$\boxed{\text{Construction abstraite de } S^{-1}A \text{ et de } \varphi : A \to S^{-1}A}$$ (S partie multiplicative)

$S^{-1}A$ = ensemble des symboles $\dfrac{a}{s}$ $\quad \begin{matrix} a \in A \\ s \in S \end{matrix}$

on définit par $\begin{matrix} a, b \in A \\ s, t \in S \end{matrix}$ $\quad \dfrac{a}{s} = \dfrac{b}{t} \iff \exists u \in S, \ u(at - bs) = 0$

$\Uparrow$ $\quad \not\Downarrow$ en général

$at - bs = 0$

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \qquad \frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \qquad 0_{S^{-1}A} = \frac{0}{1_A} \qquad 1_{S^{-1}A} = \frac{1_A}{1_A}$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ a & \longmapsto & \dfrac{a}{1_A} \end{array}$$

Construction abstraite de $S^{-1}A$ et de $\varphi : A \to S^{-1}A$ (S partie multiplicative)

$S^{-1}A$ = ensemble des symboles $\frac{a}{s}$ $\quad a \in A,\ s \in S$

on décrète pour $a, b \in A$, $s, t \in S$: $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow \boxed{\exists u \in S,\ u(at - bs) = 0}$

$\Uparrow$ $at - bs = 0$ $\quad \not\Downarrow$ en général

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \qquad \frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \qquad 0_{S^{-1}A} = \frac{0}{1_A} \qquad 1_{S^{-1}A} = \frac{1_A}{1_A}$$

$$\varphi : \begin{array}{l} A \longrightarrow S^{-1}A \\ a \longmapsto \frac{a}{1_A} \end{array} \longrightarrow \triangle!$$

NOTATION DANGEREUSE

« $\frac{a}{1_A} = a$ »

On peut avoir $\frac{a}{1_A} = 0_{S^{-1}A}$ sans avoir $a = 0_A$

En effet, soit $a \in A \setminus \{0_A\}$ tel qu'il existe $s \in S$ vérifiant $s.a = 0_A$

<u>Exemple</u> $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\qquad (1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$

$\cup$

$S = \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ $\qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\qquad a = (0, n) \in A \setminus \{0\}$

$s = (1, 0) \in S$

$\boxed{s\,a = (0, 0) = 0_A}$

$\varphi : A \to S^{-1}A$ $\qquad s \in S \quad a \in A \setminus \{0\}$

$s.a = 0_A$ donc $\varphi(s.a) = \varphi(0_A) = 0_{S^{-1}A}$

$= \varphi(s).\varphi(a)$

donc $\boxed{\varphi(s).\varphi(a) = 0_{S^{-1}A}}$ or $s \in S$ donc $\boxed{\varphi(s) \text{ est inversible}}$

donc $\varphi(a) = 0_{S^{-1}A}$ (en particulier φ n'est pas injectif)

> A quelconque
> $a \in A^\times$
> $b \in A$
> SI $a.b = 0_A$
> ALORS $b = 0_A$
> En effet
> $a^{-1} \times (a.b) = a^{-1} \times 0_A$
> donc $b = 0_A$

$$\varphi : \begin{array}{l} A \longrightarrow S^{-1}A \\ \alpha \longmapsto \frac{\alpha}{1_A} \end{array}$$

Ici on a $\boxed{\frac{a}{1_A} = \frac{0_A}{1_A}}$ tandis que $a \neq 0$

$a \times 1_A - 0_A \times 1_A = a \neq 0$

le produit en croix n'est pas nul ! par contre $\boxed{s\,(a \times 1_A - 0_A \times 1_A) = s.a = 0_A}$

$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\qquad \varphi : A \longrightarrow S_1^{-1}A$

$S_1 = \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ $\qquad \boxed{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \varphi((0,n)) = 0}$

« Pour inverser des éléments, on est parfois obligé d'en tuer d'autres »

A anneau, S partie multiplicative

« Rappel » $S^{-1}A$ est l'anneau nul si et seulement si $0_A \in S$

$S_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ (on considère la partie multiplicative engendrée) $\tilde{S}_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\tilde{S}_2^{-1} A = \{0\}$$

$S_3 = \{$ éléments de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ qui ne sont pas diviseurs de zéro $\} = (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$S_4 = (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times \mathbb{Z}$

$S_1 = \{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ $\qquad \varphi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow S_1^{-1}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$

$\{0\} \times \mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}(\varphi_1)$ (φ ci-dessus)

$\{0\} \times \mathbb{Z}$ = idéal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi"', "\text{morphisme quotient}"] & S_1^{-1}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\{0\}\times\mathbb{Z} \arrow[ur, "\psi_1"'] & \end{tikzcd}$$

ψ_1 tel que $\psi_1 \circ \pi = \varphi_1$

Tout élément de $\varphi_1(\{-1,1\}\times\mathbb{Z})$ est inversible

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\{0\}\times\mathbb{Z} = ?$

(?)

$\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow$ (?)

tel que $\operatorname{Ker}(\pi) = \{0\} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi"'] & S_1^{-1}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, bend right, "\psi_1"'] & \end{tikzcd} \qquad (x,y) \mapsto x$$

On prend $\pi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$(x,y) \longmapsto x$

$\pi(\{-1,1\}\times\mathbb{Z}) = \{-1,1\} \subset \mathbb{Z}^\times$

π est surjectif de noyau $\{0\}\times\mathbb{Z}$

On peut en déduire que $S_1^{-1}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
et le morphisme de localisation
est $\pi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$S_3 = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ensemble des éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui ne sont pas diviseurs de zéro

$(a,b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Soit $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $(a,b) \times (c,d) = (0,0)$

Il faut montrer que $(c,d) = (0,0)$

$(a,b) \times (c,d) = (0,0) \iff \begin{cases} a \times c = 0 \\ b \times d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

1) $\mathbb{Z}$ est intègre
2) $a \neq 0$ $b \neq 0$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(a,b) \notin S_3$

On $a = 0$ ou $b = 0$

Supposons par exemple $a = 0$

$(0,b) \times (1,0) = (0,0)$

or $(1,0) \neq (0,0)$

donc $(a,b) = (0,b)$ est un diviseur de zéro

$S_3^{-1} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ = anneau total des fractions de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (généralisation de la notion de corps des fractions)

<u>Admis</u> le morphisme de localisation est injectif

On cherche un anneau ① qui contient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

② dans lequel tout élément de $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ est inversible

③ le plus petit possible

On prend $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifie ①, ② mais pas ③)

<u>Réponse</u> $S_3^{-1} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et le morphisme de localisation est le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$(x,y) \longmapsto (x,y)$

$S_4 = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$ $\qquad \varphi_4 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow S_4^{-1} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(cf S_1) $\quad \mathrm{Ker}(\varphi_4) \supset \{0\} \times \mathbb{Z}$

$\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

$(x,y) \longmapsto x$

Composition $\underset{\varphi}{=}$ morphisme de localisation

$\varphi(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q}^\times$

$$S_1 = \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

On se donne C anneau

$\psi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to C$

tel que $\boxed{\psi(S_1) \subset C^\times}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & & C \\
\mathbb{Z} \arrow[urr, "\theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \{0\}\times\mathbb{Z}$ (démo à suivre)

morphisme quotient de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par $\{0\}\times\mathbb{Z}$

$(x,y) \mapsto x$

À MONTRER

$\exists!\, \theta$ tel que $\theta \circ \pi = \psi$

On a $\pi(S_1) = \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}^\times$

Rappel : $\pi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\{0\}\times\mathbb{Z}$ est le morphisme quotient de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par $\{0\}\times\mathbb{Z}$

Il suffit de montrer : $\mathrm{Ker}(\psi) \supset \{0\}\times\mathbb{Z}$

On a $\psi(\{-1,1\}\times\mathbb{Z}) \subset C^\times$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $\psi((0,n)) = 0_C$

On a $(1,0)\times(0,n) = (0,0)$

donc $\underbrace{\psi((1,0))}_{\in C^\times} \times \psi((0,n)) = 0_C$

car $(1,0) \in S_1$

donc $\psi((0,n)) = 0_C$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi \text{ tel que } \mathrm{Ker}(\psi) \supset I"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/I &
\end{tikzcd}$$

alors $\exists!\, \theta : A/I \to B$, $\theta \circ \pi = \psi$

A , I « Calculer » A/I ?

anneau idéal

On construit $f : A \longrightarrow B$ ($\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow$ B)

tel que $\ker(f) = I$

(alors $A/I \simeq f(A)$)

$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$I = \{0\} \times \mathbb{Z}$