Exercice 3.13

$\mathbb{Z}[X,Y]/\langle X,Y\rangle \simeq \mathbb{Z}$

$\varphi : \mathbb{Z}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{Z}$

$P(X,Y) \longmapsto P(0,0)$

$P = a \in \mathbb{Z} \longmapsto P(0,0) = a$ donc surjectif

$X \longmapsto 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$Y \longmapsto 0$ $Y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

donc $\langle X,Y\rangle \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\mathbb{Z}$ est intègre, mais n'est pas un corps

donc $\langle X,Y\rangle$ est premier, mais n'est pas maximal.

Rq A anneau

$A[X,Y]/\langle X,Y\rangle \simeq A$

$P = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j} X^i Y^j$ $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$

$\{(i,j)\in\mathbb{N}^2, a_{i,j}\neq 0\}$ est fini

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff a_{0,0} = 0$

Si $a_{0,0} = 0$ $P \underset{\text{car } a_{0,0}=0}{=} X \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i\geq 1}} a_{i,j} X^{i-1} Y^j$

$+ Y \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ j\geq 1}} a_{i,j} X^i Y^{j-1}$

donc $P \in \langle X,Y\rangle$

$\mathbb{Z}[X,Y]/\underbrace{\langle 2X\rangle}_{I} \simeq ?$

$2X \in I$ (par définition)

$2 \underset{?}{\in} I$ $X \underset{?}{\in} I$

$2 \underset{?}{=} 2X . P(X,Y)$ impossible ($\deg_X$)

$X \underset{?}{=} 2X\, Q(X,Y)$ impossible (tous les coefficients du polynôme $2X\, Q(X,Y)$ sont pairs)

donc I n'est pas premier

$\mathbb{Q}[X,Y]/\langle 2X\rangle \simeq \mathbb{Q}[Y]$ qui est intègre

donc $2X . \mathbb{Q}[X,Y]$ est premier

$2 \in \mathbb{Q}[X,Y]^\times$

$2X . \mathbb{Q}[X,Y] = X . \mathbb{Q}[X,Y]$

$\mathbb{Q}[X,Y]/\langle X\rangle \simeq \mathbb{Q}[Y]$

$\cancel{X^2} + \cancel{XY} + Y^2 + 1$

$\mathbb{Z}[X,Y]/\langle X\rangle \simeq \mathbb{Z}[Y]$

donc $X\,\mathbb{Z}[X,Y]$ est premier

alors que $2X\,\mathbb{Z}[X,Y]$ ne l'est pas

$$\mathbb{Z}[X,Y] / \langle 2, X, Y\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}[X,Y] / \langle 2X, Y, 2\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$$

$$\langle 2X, Y, 2\rangle = \langle Y, 2\rangle$$

$\supset$ « clair » on rajoute des générateurs

$\subset$ $2X = 2 \times X \in \langle Y, 2\rangle$

$\langle Y, 2\rangle = \{2P(X,Y) + YQ(X,Y)\}$
$P, Q \in \mathbb{Z}[X,Y]$

$$\mathbb{Z}[X] / \langle n, X\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$\langle n, X\rangle$ premier $\Leftrightarrow$ $n\mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow$ $n = 0$ ou $|n|$ est premier

$\langle n, X\rangle$ maximal $\Leftrightarrow$ $|n|$ est premier

$A[X]$ intègre ssi A est intègre

$$\mathbb{Z}[X] / \langle n\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$$

$n\mathbb{Z}[X]$ premier $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ intègre
$\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ intègre
$\Leftrightarrow$ $n = 0$ ou $|n|$ est premier

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ est un corps $\Rightarrow$ $n = 0$ ou $|n|$ est premier

A intègre
$A[X]^\times = A^\times \subsetneq A[X] \setminus \{0\}$

$\left.\begin{array}{ll} n = 0 & \mathbb{Z}[X] \\ |n| = p \text{ premier} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \end{array}\right\}$ ne sont pas des corps

donc $n\mathbb{Z}[X]$ n'est jamais un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$
si $|n| \neq 1$ Si $|n| = 1$ $n\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[X]$

De fait, l'idéal $\langle n, X\rangle$ est un idéal propre de $\mathbb{Z}[X]$ qui contient strictement $n\mathbb{Z}[X]$.

(à terminer pour mercredi 7 avril)

$C^{\mathbb{K}}$ corps

Exercice 4.5

$S \subset A$ intègre

↳ partie multiplicative c'est-à-dire $\forall a_1 \in S\ \forall a_2 \in S \quad a_1 \times a_2 \in S$

On suppose en outre $0_A \notin S$ $\quad (S \neq \emptyset$ ou $1_A \in S)$ définition en cours

donc $\forall s \in S,\ s \in \mathbb{K}^\times$

$$B := \{a \cdot s^{-1}\}_{(a,s) \in A \times S} \subset \mathbb{K} \quad (\text{vide si } S = \emptyset)$$

① B est un sous anneau de $\mathbb{K}$ qui contient A ?

On applique la définition.

On prend $x, y \in B$ On montre $x + y \in B$, $xy \in B$, $-x \in B$ $\quad$ On montre $1_{\mathbb{K}} \in B$ (et $0_{\mathbb{K}} \in B$)

↳ On écrit $x = \frac{a}{s}$ $\quad y = \frac{b}{t}$ $\quad a, b \in A$ $\quad s, t \in S$

$$x + y = \frac{at + bs}{st}$$

$at + bs \in A$ (car A est un sous anneau de $\mathbb{K}$)

$st \in S$ car S est une partie multiplicative

etc ...

② « $B = S^{-1}A$ et le morphisme de localisation est le morphisme déduit de l'inclusion de A dans B » ?

$A \subset B$ sous anneau

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi :\ & A \longrightarrow B \\ & a \longmapsto a = \frac{a}{1} \end{aligned}}$$

morphisme d'anneaux

Il faut montrer : φ vérifie la propriété universelle du localisé

c'est-à-dire a) $\varphi(S) \subset B^\times$

b) pour tout morphisme d'anneaux $\psi : A \to C$ (C anneau quelconque)

tel que $\psi(S) \subset C^\times$, alors il existe un unique morphisme $\theta : B \to C$ tel que $\theta \circ \varphi = \psi$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi \text{ tq } \psi(S) \subset C^\times"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "\exists ! \theta \text{ tq } \theta \circ \varphi = \psi"'] & \end{tikzcd}$$

G

Il faut montrer : vérifie la propriété universelle du localisé

c'est-à-dire a) $\varphi(S) \subset B^\times$

b) pour tout morphisme d'anneaux $\psi : A \to C$ (C anneau quelconque)

tel que $\psi(S) \subset C^\times$, alors il existe un unique morphisme $\theta : B \to C$ tel que $\theta \circ \varphi = \psi$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi \text{ tq } \psi(S) \subset C^\times"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\ B \arrow[ur, dashed, "\exists! \theta \text{ tq } \theta\circ\varphi = \psi"'] & \end{tikzcd}$$

G

a) $s \in S$ $\quad \underset{\substack{\| \\ s}}{\varphi(s)} \in B^\times$? On $s^{-1} = 1 \times s^{-1} \in B$

inverse de s dans $\mathbb{K}$

$s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K}^\times$ $\Big\}$ donc $s \in B^\times$

Énoncé général $A \subset B$ sous anneau

si $a \in A \cap B^\times$ vérifie : $a^{-1} \in A$ alors $a \in A^\times$

b) $\psi : A \to C$ $\quad \psi(S) \subset C^\times$ $\quad \theta$?

"analyse - synthèse" On suppose un tel θ construit et on en tire toutes les $\begin{cases} \text{informations} \\ \text{contraintes} \end{cases}$ possibles

On en déduit l'unicité et l'existence

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\ B \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

$\theta \circ \varphi = \psi$

$\theta : B \to C$

$a \times s^{-1} \mapsto \theta(a \times s^{-1}) = \theta(\varphi(a) \times \varphi(s)^{-1})$

$a \in A \quad s \in S$

$= \theta(\varphi(a)) \times \theta(\varphi(s))^{-1}$

$= \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

Si θ existe, nécessairement, il envoie $\begin{matrix} a \times s^{-1} \\ a \in A \quad s \in S \end{matrix}$ sur $\psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

décrit tous les éléments de B

d'où l'unicité de θ

Soit θ_1, θ_2 qui vérifie la propriété

Soit $b \in B$ On écrit $b = a \times s^{-1}$

Alors $\theta_1(b) = \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$

$\theta_2(b) = \psi(a) \times \psi(s)^{-1}$ $\Big\}$ donc $\theta_1 = \theta_2$

Existence

On définit

$$\theta : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ a \times s^{-1} & \longmapsto & \psi(a) \times \psi(s)^{-1} \end{array}$$

$a \in A$, $s \in S$

↳ a un sens car $\psi(S) \subset C^\times$

À vérifier (pour la prochaine séance)

1) θ est bien défini ⚠ l'écriture $b = a \times s^{-1}$ n'est pas unique

2) θ est un morphisme d'anneaux

3) $\theta \circ \varphi = \psi$ (« immédiat »)