$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Irr}(\mathbb{R}[X]) = \{$polynômes irréductibles UNITAIRES de $\mathbb{R}[X]\}$

$$Q = \frac{1}{2}(X-1)(X+2)(X^2+1)^3(X^2+5)^4(X^2+X+1)^0$$

$X-1$, $X+2$, X^2+1, X^2+5 $\in \mathrm{Irr}(\mathbb{R}[X])$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$P \in \mathrm{Irr}(\mathbb{R}[X])$ $\quad \nu_P(Q) \in \mathbb{N}$ "la puissance de P dans la décomposition de Q"

$P = X-1 \quad \nu_P(Q) = 1$

$P = X+2 \quad \nu_P(Q) = 1$

$P = (X^2+1) \quad \nu_P(Q) = 3$

$P = X^2+5 \quad \nu_P(Q) = 4$

$P = X^2+X+1 \quad \nu_P(Q) = 0$

$P \notin \{X-1, X+2, X^2+1, X^2+5\}$

$\nu_P(Q) = 0$

⚠ Si $a \in A$ ~~tel que $a = b \times c$ avec $b, c \in A$ alors a n'est pas~~ irréductible

A anneau intègre

$$a = 1_A \times a = \alpha \times (\alpha^{-1} a) \qquad \alpha \in A^\times$$

$a \notin A^\times$ $\quad a$ irréductible $\iff \forall b, c \in A,\ a = b \times c \implies b \in A^\times$ ou $c \in A^\times$

$A = \mathbb{Z}$ $\quad a \notin \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

a irréductible $\iff \forall b, c \in \mathbb{Z},\ a = b \times c \implies |b| = 1$ ou $|c| = 1$

$\iff$ l'ensemble des diviseurs de a est $\{a, -a, 1, -1\}$

$\iff \begin{cases} a \text{ est premier (si } a \text{ est positif)} \\ \text{ou} \\ -a \text{ est premier (si } a \text{ est négatif)} \end{cases}$

$A = \mathbb{K}[X]$ $\qquad \mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $\quad P = \frac{1}{2} \times 2P$

<u>Définition 1</u> Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et si pour tous $Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $P = Q \times R$ entraîne $Q \in \mathbb{K}^\times$ ou $R \in \mathbb{K}^\times$ unitaire

<u>Définition 2</u> Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et ses seuls diviseurs unitaires sont 1 et P.

$A = \mathbb{K}[X]$ $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $P = \frac{1}{2} \times 2P$

Définition 1 Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et si pour tous $Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $P = Q \times R$ entraîne $Q \in \mathbb{K}^\times$ ou $R \in \mathbb{K}^\times$

unitaire

Définition 2 Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et ses seuls diviseurs unitaires sont 1 et P.

Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et $\frac{P}{\alpha}$ est irréductible (α coefficient dominant de P)

Définition 3 Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et il n'existe pas de décomposition $P = Q \times R$ avec $\deg(Q) < \deg(P)$ et $\deg(R) < \deg(P)$

Soit P irréductible au sens de la déf 1

Déf 1 $\Rightarrow$ Déf 3 $P = Q \times R$ nécessairement $\deg(Q) = \deg(P)$ ou $\deg(R) = \deg(P)$

Ou $Q \in \mathbb{K}^\times$ ou $R \in \mathbb{K}^\times$?

Si $Q \in \mathbb{K}^\times$, $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R)$
$= 0 + \deg(R) = \deg(R)$

Exemple 1) $\mathbb{K}$ corps quelconque $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = 1$

Alors P est irréductible

P est non constant ($\deg(P) \neq 0$) et $P \neq 0$

$P = Q \times R$ (Soit $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tq) $1 = \deg(P) = \underbrace{\deg(Q)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\deg(R)}_{\in \mathbb{N}}$ donc nécessairement $\deg(Q) = 1 = \deg(P)$ ou $\deg(R) = 1 = \deg(P)$

2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$

alors P n'est pas irréductible

En effet d'après le théorème fondamental de l'algèbre, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$

Donc $X - \alpha$ divise P

Donc P s'écrit $P = (X - \alpha) Q$ avec $\deg(X - \alpha) = 1 < \deg(P)$ et $\deg(Q) = \deg(P) - 1 < \deg(P)$

Définition 3 bis Un élément P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et il n'admet pas de diviseur Q tel que

$$1 \leq \deg(Q) < \deg(P)$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1. P est non constant

L'inégalité $1 \leq \underbrace{\deg(Q)}_{\in \mathbb{N}} < \deg(P) = 1$ n'est jamais vérifiée

---

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$Q_1 = \frac{1}{2}(X-1)(X+2)(X^2+1)^3(X^2+5)^4$ $\quad Q_1$ a des facteurs multiples

$Q_2 = (X-1)(X+2)(X^2+1)(X^2+5)$ $\quad Q_2$ a les mêmes facteurs que Q_1, n'a pas de facteurs multiples

---

A anneau intègre $\quad a \in A$

Si aA est un idéal premier non nul, alors a est irréductible.

Réciproque ? Vrai pour $A = \mathbb{Z}$

" $A = \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K}$ corps)

" $A = \mathbb{Z}[i]$ (plus délicat) $\quad A = \mathbb{Z}[X]$ $\quad A = \mathbb{K}[X, Y]$ ($\mathbb{K}$ corps)

Faux en général !

Si c'était vrai, le grand théorème de Fermat serait beaucoup plus simple à démontrer

$A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ $\quad 2$ est irréductible mais $2A$ n'est pas premier (exercice 2.6)

B anneau quelconque $\qquad$ A anneau

$$\boxed{\text{Structure de } A\text{-algèbre sur } B \iff \text{morphisme } \varphi : A \to B}$$

$$\varphi : A \to B \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & B \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b := \varphi(a)\, b \end{array}$$

$$\varphi : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \cdot 1_B \end{array} \quad \leftsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & B \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

$A = \mathbb{K}$ un corps

Si B est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre, alors B hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times B & \longrightarrow & B \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

<u>Exemple</u> $\mathbb{K}$ un corps $\qquad P \in \mathbb{K}[X] \qquad B := \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$

structure de $\mathbb{K}$-algèbre sur $\mathbb{K}[X]$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{K}[X] \arrow[r] & \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X] \end{tikzcd}$$

structure de $\mathbb{K}$-algèbre (donc de $\mathbb{K}$-espace vectoriel) sur B

A anneau, B A-algèbre

fixe un élément

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-algèbres}}(A[X], B) = B$$

$$\varphi \longmapsto \varphi(X)$$

$$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot b^i \quad \longleftarrow\!\!\shortmid \quad b \in B$$

$a_i \in A$, $d \in \mathbb{N}$

loi de composition externe sur A-algèbre

$\mathbb{K}$ corps $\qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A) \xrightarrow{\sim} A$

$A | \mathbb{K}$ algèbre $\qquad \mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A[X], B) = \mathrm{Hom}^{\varphi}_{\text{anneaux}} \cancel{(A,B)} \times B(X)$

$$ev_a : \sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot a^i \quad \longleftarrow\!\!\shortmid \quad a$$

$\alpha_i \in \mathbb{K}$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $\qquad \mathrm{Hom}_{A\text{-algèbres}}(A[X_1, \dots, X_n], B) \text{ « = » } B^n$

$P \in \mathbb{K}[X] \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X], A) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A)$

$$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A),\ \mathrm{Ker}(\varphi) \supset P\mathbb{K}[X]\}$$

$$= \{ \quad '' \quad ,\ P \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}$$

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-algèbres}}(A[X_1,\dots,X_m], B) \text{ “}=\text{” } B^m$$

$A = \mathbb{C} \quad B = \mathbb{C} \qquad F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$

$n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \qquad I := \langle F_1, \dots, F_n \rangle$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}\left(\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m] / \langle F_1,\dots,F_n\rangle, \mathbb{C}\right)$$

$$= \{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m], \mathbb{C}), \quad \mathrm{Ker}(\varphi) \supset I \}$$

$$= \{ \quad \text{''} \quad , F_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi), \dots, F_n \in \mathrm{Ker}(\varphi) \}$$

$$\text{''} \mathcal{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m], \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{bijection}} \mathbb{C}^m$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_m))$$

$$\varphi \in \mathcal{A} \overset{\sim}{\longmapsto} (z_1, \dots, z_m)$$

$$F_1(z_1, \dots, z_m) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_n(z_1, \dots, z_m) = 0$$

$$\mathcal{A} = \{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m], \mathbb{C}), \quad \varphi(F_1) = \dots = \varphi(F_n) = 0 \}$$

$m = 2 \qquad F_1 = \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i,j \leq d}} a_{i,j} X_1^i X_2^j \qquad \varphi(F_1) = \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i,j \leq d}} a_{i,j}\, \varphi(X_1)^i \varphi(X_2)^j$

$\mathbb{R} \quad m = 2 \qquad F_1 = X_1^2 + X_2^2 - 1$

$$\{ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \}$$

$\mathbb{K}$ corps
A $\mathbb{K}$-algèbre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A) \xrightarrow{\sim} A$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(X)$$
$$ev_a : \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot X^i \mapsto \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot a^i \longleftarrow a$$
$$\alpha_i \in \mathbb{K}$$

$P \in \mathbb{K}[X]$ $\quad \mathcal{A}_P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X], A) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A)$

$$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A),\ \mathrm{Ker}(\varphi) \supset P\mathbb{K}[X]\}$$
$$= \{\quad \text{''} \quad,\ P \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}$$
$$= \{\quad \text{''} \quad,\ \varphi(P) = 0\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(\mathbb{K}[X], A) \xrightarrow{\sim} A$$
$$\cup \qquad \varphi \longmapsto \varphi(X)$$
$$\mathcal{A}_P \ni \varphi \longmapsto \varphi(X) \text{ qui vérifie } \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \varphi(X)^i = 0$$

induit $\quad \mathcal{A}_P \xrightarrow{\sim} \{a \in A,\ \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot a^i = 0\}$
$$= \{a \in A,\ ev_a(P) = 0\}$$

$$P = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot X^i \quad \varphi(P) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i\, \varphi(X)^i$$