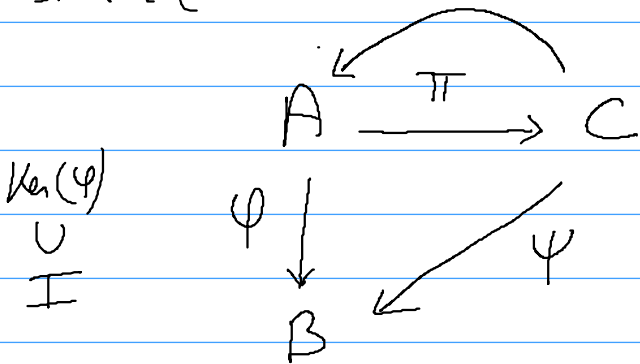


Démonstration du Théorème 47

I idéal de A δ $\pi \circ \delta = \text{Id}_C$



π surjectif
 $\text{Ker}(\pi) = I$

$$\psi \circ \pi = \varphi \quad (*)$$

$$\text{Ker}(\varphi) \stackrel{?}{=} \pi(\text{Ker}(\psi))$$

$$\pi(\text{Ker}(\psi)) \subset \text{Ker}(\varphi) \quad (?)$$

Soit $c \in \pi(\text{Ker}(\psi))$ Soit $a \in \text{Ker}(\psi)$
tel que $c = \pi(a)$
 $\psi(c) = \psi(\pi(a)) = \varphi(a)$ d'après $(*)$
 $= 0$ car $a \in \text{Ker}(\psi)$

$$\text{Ker}(\varphi) \subset \pi(\text{Ker}(\psi)) \quad (?)$$

$$\psi = \varphi \circ \delta$$

Soit $c \in \text{Ker}(\psi)$ $\psi(c) = 0 = \varphi(\delta(c))$

Donc $\delta(c) \in \text{Ker}(\varphi)$

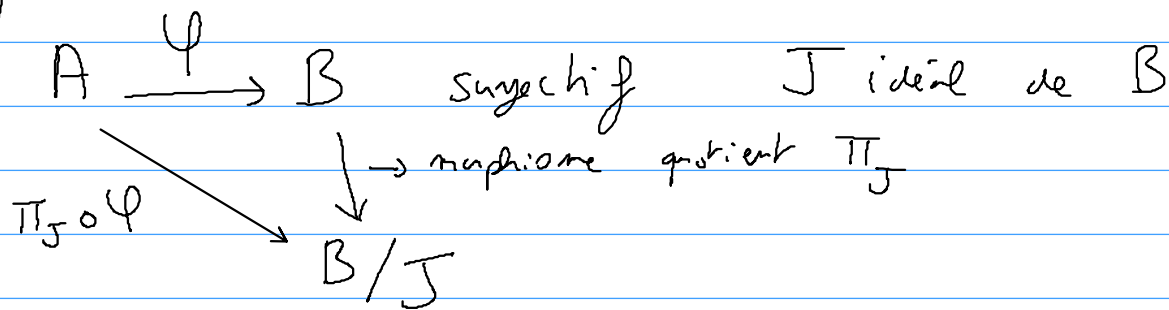
Donc $\pi(\delta(c)) \in \pi(\text{Ker}(\varphi))$

\parallel
 c (en effet $\pi \circ \delta = \text{Id}_C$)

Donc $c \in \pi(\text{Ker}(\varphi))$

Théorème 48 1 (b) (c)

1 (b)



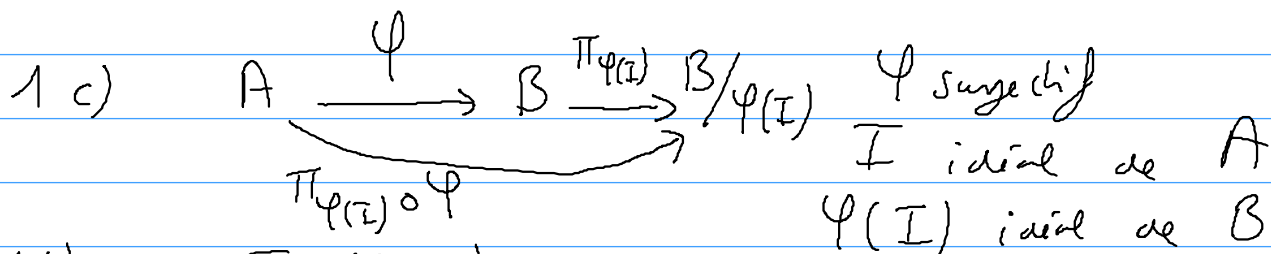
Pour montrer que B/\mathcal{J} est isomorphe à $A/\varphi^{-1}(\mathcal{J})$

il suffit d'exhiber un morphisme $A \rightarrow B/\mathcal{J}$ surjectif de noyau $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$

$\pi_{\mathcal{J}} \circ \varphi$ est surjectif (composition de deux morphismes surjectifs)

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(\pi_{\mathcal{J}} \circ \varphi) &= \{a \in A, \pi_{\mathcal{J}}(\varphi(a)) = 0\} \\
 &= \{a \in A, \varphi(a) \in \text{Ker}(\pi_{\mathcal{J}})\} \\
 &= \{a \in A, \varphi(a) \in \mathcal{J}\} \\
 &= \varphi^{-1}(\mathcal{J})
 \end{aligned}$$

Donc $\pi_{\mathcal{J}} \circ \varphi$ est un morphisme surjectif, de noyau $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$
 donc induit un isomorphisme de $A/\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ sur B/\mathcal{J} .



1 (b) avec $\mathcal{J} = \varphi(\mathcal{I})$

(parce que φ est surjectif)

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(\pi_{\varphi(\mathcal{I})} \circ \varphi) &= \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{I})) = \{a \in A, \varphi(a) \in \varphi(\mathcal{I})\} \\
 &= \{a \in A, \exists b \in \mathcal{I}, \varphi(a) = \varphi(b)\} = \{a \in A, \exists b \in \mathcal{I}, a - b \in \text{Ker}(\varphi)\} \\
 &= \mathcal{I} + \text{Ker}(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ a \in A, \exists b \in I, a - b \in \text{Ker}(\varphi) \} \\
&= \{ a \in A, \exists b \in I, \exists c \in \text{Ker}(\varphi), a - b = c \} \\
&= \{ a \in A, \exists b \in I, \exists c \in \text{Ker}(\varphi), a = b + c \} \\
&= I + \text{Ker}(\varphi)
\end{aligned}$$

(exo 2.4) I idéal de A

$$A \xrightarrow{\varphi} A/I \text{ surjectif, de noyau } I$$

$$A \xrightarrow{\varphi} B \text{ surjectif}$$

(proposition 20 du Chapitre 2)

	$\{ \text{idéaux de } A \text{ qui contiennent } \text{Ker}(\varphi) \}$	I	$\varphi^{-1}(J)$
bijection strictement croissante	\downarrow	$I \subset I_2$	\downarrow
	$\{ \text{idéaux de } B \}$	ssi $\varphi(I) \subset \varphi(I_2)$	J

$$\{ \text{idéaux de } A \text{ contenant } I \} \cong \{ \text{idéaux de } A/I \}$$

$$\{ \text{idéaux de } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \} \cong \{ \text{idéaux de } \mathbb{Z} \text{ qui contiennent } 6\mathbb{Z} \}$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \{ \text{idéaux de } \mathbb{Z} \}$$

$$n \longmapsto n\mathbb{Z}$$

bijection $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$
ssi $m \mid n$

$$\{ \text{idéaux de } \mathbb{Z} \text{ qui contiennent } 6\mathbb{Z} \} \cong \{ m \in \mathbb{N}, m \mid 6 \}$$

$$\{ 1, 2, 3, 6 \}$$

$$\pi_6: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$$m \longmapsto [m]_6$$

$$\{ \text{idéaux de } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \}$$

$$= \{ \pi_6(\mathbb{Z}), \pi_6(2\mathbb{Z}), \pi_6(3\mathbb{Z}), \pi_6(6\mathbb{Z}) \}$$

$$\cong \{ 0, 2, 3, 0 \}$$

$$\cong \{ 0, 2, 3 \}$$

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ [0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6 \}$$

$$\pi_6(\mathbb{Z}) = \{ [2m]_6, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ [0]_6, [2]_6, [4]_6 \}$$

$$\pi_6(3\mathbb{Z}) = \{ [0]_6, [3]_6 \}$$

$$\mathbb{K}[X] / \langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle$$

$$\{ P \in \mathbb{K}[X] \text{ unitaires} \} \cup \{ 0 \} \xrightarrow{\text{bijection}} \{ \text{idéaux de } \mathbb{K}[X] \}$$

$$P \longmapsto P \cdot \mathbb{K}[X]$$

$P \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$
ssi
 $Q | P$

$$\{ P \in \mathbb{K}[X] \text{ unitaires qui divisent } X^4 + 3X^3 + 2X^2 \} \xrightarrow{\text{bijection}} \{ \text{idéaux de } \mathbb{K}[X] \text{ qui contiennent } \langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle \}$$

↓

$$\{ \text{idéaux de } \mathbb{K}[X] / \langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle \}$$

Combien y en a-t-il ?

$$X^4 + 3X^3 + 2X^2 = X^2(X+1)(X+2)$$

$$\{ P \text{ unitaire, } P \mid X^2(X+1)(X+2) \} = \{ X^v(X+1)^\mu(X+2)^\zeta \}$$

car $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$

$$\{ X^v(X+1)^\mu \}$$

$0 \leq v \leq 3$
 $0 \leq \mu \leq 1$

$0 \leq v \leq 2$
 $0 \leq \mu \leq 1$
 $0 \leq \zeta \leq 1$

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

$X, X+1$ et $X+2$ sont bien

Trois polynômes irréductibles unitaires \mathbb{Z} -à- \mathbb{Z} distincts

car $(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$ $X+2 = X$ $X^4 + 3X^3 + 2X^2 = X^3(X+1)$

$m \in \mathbb{Z}, \mathbb{K}$
 $m \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$
 $m \neq 0$
car $(\mathbb{K}) \neq \mathbb{Z}$

A anneau

$$\varphi_A: \mathbb{Z} \longrightarrow A$$
$$n \longmapsto n \cdot 1_A$$

$$\text{Ker}(\varphi_A) = \text{car}(A) \cdot \mathbb{Z} \quad \text{car}(A) \in \mathbb{N}$$

$$\text{car}(A) = 1 \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi_A) = \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 1 \in \text{Ker}(\varphi_A)$$

$$\Leftrightarrow 1_A = 0_A$$

$$\Leftrightarrow A = \{0\}$$

$A = \mathbb{K}$ est un corps

$$m = \text{car}(\mathbb{K})$$

$$\varphi_{\mathbb{K}}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{de noyau } m\mathbb{Z}$$

donc $\varphi_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

donc \mathbb{K} possède un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Or \mathbb{K} est intègre donc $\begin{cases} m \text{ est premier} \\ m \\ m=0 \end{cases}$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ est intègre} \Leftrightarrow m\mathbb{Z} \text{ est un idéal premier})$
 $(m \geq 0) \quad \Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m \text{ est premier}$
(anneau intègre)

Conclusion: La caractéristique d'un corps est
0 ou un nombre premier

$\text{car}(\mathbb{Q}) = 0$ p premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps
et $\text{car}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$

$$\varphi: \mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \varphi \text{ surjectif}$$

$$P \longmapsto P(0, 0) \quad \text{de noyau } \langle X, Y \rangle$$

surjectif ? $\alpha \in \mathbb{C} \quad P = \alpha \quad P(0, 0) = \alpha$
 (polynôme constant)

$$\text{Ker}(\varphi) = \langle X, Y \rangle$$

$\Rightarrow X \in \text{Ker}(\varphi) \quad \text{donc } \text{Ker}(\varphi) \text{ contient l'idéal}$
 $Y \in \text{Ker}(\varphi) \quad \text{engendré par } X \text{ et } Y$

$$R(X, Y) = X P(X, Y) + Y Q(X, Y)$$

$$R(0, 0) = 0 \cdot P(0, 0) + 0 \cdot Q(0, 0) = 0$$

$$\subset P \in \mathbb{C}[X, Y] \quad P = \sum_{(i, j) \in \mathbb{N}^2} a_{i, j} \cdot X^i Y^j$$

avec $a_{i, j} \in \mathbb{C}$

et $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2, a_{i, j} \neq 0\}$ est fini

$$P(0, 0) = a_{0, 0}$$

Si $P(0, 0) = 0 \quad P = \sum_{\substack{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \\ (i, j) \neq (0, 0)}} a_{i, j} \cdot X^i Y^j$

$$= X \sum_{\substack{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i, j} \neq 0 \\ i \geq 1}} a_{i, j} X^{i-2} Y^j$$

$$= \sum_{\substack{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i, j} \neq 0 \\ i \geq 1}} a_{i, j} X^i Y^j$$

$$+ Y \sum_{\substack{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i, j} \neq 0 \\ i=0, j \geq 1}} a_{0, j} Y^{j-1}$$

$$+ \sum_{\substack{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i, j} \neq 0 \\ i=0, j \geq 1}} a_{0, j} Y^j$$