Démonstration du théorème 47

I idéal de A $\qquad \pi \circ s = Id_C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(\varphi) \supset I$

π surjectif

$\mathrm{Ker}(\pi) = I$

$$\psi \circ \pi = \varphi \quad (*)$$

$$\mathrm{Ker}(\psi) \overset{?}{=} \pi(\mathrm{Ker}\,\varphi)$$

$\pi(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$?

Soit $c \in \pi(\mathrm{Ker}(\varphi))$ $\quad$ Soit $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ tel que $c = \pi(a)$

$\psi(c) = \psi(\pi(a)) = \varphi(a)$ d'après $(*)$

$= 0$ car $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\mathrm{Ker}(\psi) \subset \pi(\mathrm{Ker}(\varphi))$?

$$\psi = \varphi \circ s$$

Soit $c \in \mathrm{Ker}(\psi)$ $\quad \psi(c) = 0 = \varphi(s(c))$

Donc $s(c) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

Donc $\underbrace{\pi(s(c))}_{= c} \in \pi(\mathrm{Ker}(\varphi))$ (en effet $\pi \circ s = Id_C$)

Donc $c \in \pi(\mathrm{Ker}(\varphi))$

Théorème 48 1 (b) (c)

1(b)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_J \circ \varphi"'] & B \arrow[d] \\ & B/J \end{tikzcd}$$

surjectif J idéal de B

$\to$ morphisme quotient π_J

Pour montrer que B/J est isomorphe à $A/\varphi^{-1}(J)$ il suffit d'exhiber un morphisme $A \to B/J$ surjectif de noyau $\varphi^{-1}(J)$

$\pi_J \circ \varphi$ est surjectif (composée de deux morphismes surjectifs)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\pi_J \circ \varphi) &= \{a \in A,\ \pi_J(\varphi(a)) = 0\} \\ &= \{a \in A,\ \varphi(a) \in \mathrm{Ker}(\pi_J)\} \\ &= \{a \in A,\ \varphi(a) \in J\} \\ &= \varphi^{-1}(J) \end{aligned}$$

Donc $\pi_J \circ \varphi$ est un morphisme surjectif, de noyau $\varphi^{-1}(J)$ donc induit un isomorphisme de $A/\varphi^{-1}(J)$ sur B/J.

1 c)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\pi_{\varphi(I)} \circ \varphi"'] & B \arrow[r, "\pi_{\varphi(I)}"] & B/\varphi(I) \end{tikzcd}$$

φ surjectif

I idéal de A

$\varphi(I)$ idéal de B (parce que φ est surjectif)

1 b) avec $J = \varphi(I)$

$\mathrm{Ker}(\pi_{\varphi(I)} \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\varphi(I)) = \{a \in A,\ \varphi(a) \in \varphi(I)\}$

$= \{a \in A,\ \exists b \in I,\ \varphi(a) = \varphi(b)\} = \{a \in A,\ \exists b \in I,\ a - b \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}$

$= I + \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\{a \in A,\ \exists b \in I,\ a - b \in \ker(\varphi)\}$

$= \{a \in A,\ \exists b \in I,\ \exists c \in \ker(\varphi),\ a - b = c\}$

$= \{a \in A,\ \exists b \in I,\ \exists c \in \ker(\varphi),\ a = b + c\}$

$= I + \ker(\varphi)$

(exo 2.4) I idéal de A

$A \xrightarrow{\varphi} A/I$ surjectif, de noyau I

$A \xrightarrow{\varphi} B$ surjectif

(proposition 20 du chapitre 2)

$$\begin{array}{c} \{\text{idéaux de } A \text{ qui contiennent } \ker(\varphi)\} \\ \downarrow \\ \{\text{idéaux de } B\} \end{array}$$

bijection strictement croissante

$I_1 \subset I_2$ ssi $\varphi(I_1) \subset \varphi(I_2)$

$I \mapsto \varphi(I)$, $\quad J \mapsto \varphi^{-1}(J)$

$\{\text{idéaux de } A \text{ contenant } I\} \xrightarrow{\sim} \{\text{idéaux de } A/I\}$

$\{\text{idéaux de } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{idéaux de } \mathbb{Z} \text{ qui contiennent } 6\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{N} \longrightarrow \{\text{idéaux de } \mathbb{Z}\}$

$n \longmapsto n\mathbb{Z}$

bijection $\quad n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ ssi $m \mid n$

$\{\text{idéaux de } \mathbb{Z} \text{ qui contiennent } 6\mathbb{Z}\} \xrightarrow{\sim} \{m \in \mathbb{N},\ m \mid 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$

$\pi_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$n \longmapsto [n]_6$

$\{\text{idéaux de } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\}$

$= \{\underbrace{\pi_6(\mathbb{Z})}_{= \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}},\ \pi_6(2\mathbb{Z}),\ \pi_6(3\mathbb{Z}),\ \underbrace{\pi_6(6\mathbb{Z})}_{= \{0_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}\}}\}$

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$$

$$\pi_6(2\mathbb{Z}) = \{[2n]_6,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$$

$$\pi_6(3\mathbb{Z}) = \{[0]_6, [3]_6\}$$

$$\mathbb{K}[X] / \langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle$$

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ unitaires}\} \cup \{0\} \xrightarrow{\text{bijection}} \{\text{idéaux de } \mathbb{K}[X]\}$$

$$P \longmapsto P \cdot \mathbb{K}[X]$$

$P\mathbb{K}[X] \subset Q\mathbb{K}[X]$ ssi $Q \mid P$

$$\cup$$

$$\left\{\begin{matrix} P \in \mathbb{K}[X] \text{ unitaires} \\ \text{qui divisent } X^4 + 3X^3 + 2X^2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{bijection}} \left\{\begin{matrix}\text{idéaux de } \mathbb{K}[X] \text{ qui} \\ \text{contiennent } \langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle\end{matrix}\right\}$$

$$\downarrow \wr$$

$$\left\{\text{idéaux de } \mathbb{K}[X]/\langle X^4 + 3X^3 + 2X^2\rangle\right\}$$

Combien y en a-t-il ?

$$X^4 + 3X^3 + 2X^2 = X^2 (X+1)(X+2)$$

$$\{P \text{ unitaire},\ P \mid X^2(X+1)(X+2)\} = \{X^\nu (X+1)^\mu (X+2)^z\}$$

$0 \leq \nu \leq 2$

$0 \leq \mu \leq 1$

$0 \leq z \leq 1$

car $\mathbb{K} = 2$ $\quad \{X^\nu (X+1)^\mu\}$

$0 \leq \nu \leq 3$

$0 \leq \mu \leq 1$

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

$m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$

$m \cdot 1_{\mathbb{K}} \overset{?}{=} 0_{\mathbb{K}}$

car $(\mathbb{K}) \neq 2$ $\quad \boxed{X,\ X+1 \text{ et } X+2}$ sont bien trois polynômes irréductibles unitaires 2 à 2 distincts

car $(\mathbb{K}) = 2$ $\quad X + 2 = X \quad X^4 + 3X^3 + 2X^2 = X^3(X+1)$

A anneau

$$\varphi_A : \mathbb{Z} \longrightarrow A$$
$$n \longmapsto n \cdot 1_A$$

$\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \mathrm{car}(A) \cdot \mathbb{Z}$ $\qquad \mathrm{car}(A) \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{car}(A) = 1 \iff \mathrm{Ker}(\varphi_A) = \mathbb{Z}$$
$$\iff 1 \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$$
$$\iff 1_A = 0_A$$
$$\iff A = \{0\}$$

$A = \mathbb{K}$ est un corps

$n = \mathrm{car}(\mathbb{K})$

$\varphi_{\mathbb{K}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$ de noyau $n\mathbb{Z}$

donc $\varphi_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

donc $\mathbb{K}$ possède un sous anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Or $\mathbb{K}$ est intègre donc $\begin{cases} n \text{ est premier} \\ \text{ou} \\ n = 0 \end{cases}$

($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre $\iff$ $n\mathbb{Z}$ est un idéal premier
$(n \geq 0)$ $\qquad \iff n = 0$ ou n est premier)
(anneau intègre)

Conclusion : la caractéristique d'un corps est 0 ou un nombre premier

$\mathrm{car}(\mathbb{Q}) = 0$ $\qquad p$ premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps
et $\mathrm{car}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X,Y] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(0,0) \end{array}$$

φ surjectif de noyau $\langle X, Y \rangle$

surjectif ? $\alpha \in \mathbb{C}$ $P = \alpha$ (polynôme constant) $P(0,0) = \alpha$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \overset{?}{=} \langle X, Y \rangle$$

$\supset$ $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $Y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient l'idéal engendré par X et Y

$$R(X,Y) = X\,P(X,Y) + Y\,Q(X,Y)$$

$$R(0,0) = 0 \cdot P(0,0) + 0\,Q(0,0) = 0$$

$\subset$ $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ $\displaystyle P = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} \cdot X^i Y^j$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{C}$

et $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ a_{i,j} \neq 0\}$ est fini

$$P(0,0) = a_{0,0}$$

Si $P(0,0) = 0$ $\displaystyle P = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ (i,j) \neq (0,0)}} a_{i,j} \cdot X^i Y^j$

$$= \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i,j} \neq 0 \\ i \geq 1}} a_{i,j} X^i Y^j + \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i,j} \neq 0 \\ i=0 \quad j \geq 1}} a_{0,j} Y^j$$

$$= X \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i,j} \neq 0 \\ i \geq 1}} a_{i,j} X^{\overbrace{i-1}^{\geq 0}} Y^j + Y \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i,j} \neq 0 \\ i=0 \quad j \geq 1}} a_{0,j} Y^{\overbrace{j-1}^{\geq 0}}$$