Exo 1.7.3

p nombre premier

$$v_p : \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
$$\cup \qquad 0 \longmapsto +\infty$$
$$\mathbb{Z}$$

$\forall x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad v_p(x) = n \iff \exists y \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z},\ x = p^n y$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}_{(p)}, n \in \mathbb{N} \quad v_p(x) = n \iff \exists y, z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z},\ x = p^n \frac{y}{z}} \quad (*)$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{(p)}$ $\quad v_p(x_1 + x_2) \leq \operatorname{Min}(v_p(x_1), v_p(x_2))$ égalité si $v_p(x_1) \neq v_p(x_2)$?

$\quad v_p(x_1 \times x_2) = v_p(x_1) + v_p(x_2)$

Si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ « facile »

Supposons $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ Soit $n_1 := v_p(x_1)$ $\quad n_2 := v_p(x_2)$

Soit $y_1, z_1, y_2, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ tels que $x_1 = p^{n_1} \frac{y_1}{z_1}$ $\quad x_2 = p^{n_2} \frac{y_2}{z_2}$

$$x_1 x_2 = p^{n_1 + n_2} \frac{y_1 \times y_2}{z_1 \times z_2}$$

$y_1 \times y_2$ → produit de deux entiers non divisibles par p donc $y_1 \times y_2 \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ (p PREMIER)

$z_1 \times z_2$ → de même $z_1 \times z_2 \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{D'après } (*),}$ $\quad v_p(x_1 x_2) = n_1 + n_2 = v_p(x_1) + v_p(x_2)$

Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $n_1 \leq n_2$

$$x_1 + x_2 = p^{n_1} \frac{y_1}{z_1} + p^{n_2} \frac{y_2}{z_2} = p^{n_1} \left[\frac{y_1}{z_1} + p^{\overbrace{n_2 - n_1}^{\in \mathbb{N}}} \frac{y_2}{z_2} \right]$$

$$= p^{n_1} \times w \qquad \text{avec } w \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

Donc $\quad v_p(x_1 + x_2) = v_p(p^{n_1} \times w)$

$$= v_p(p^{n_1}) + v_p(w) = n_1 + \underbrace{v_p(w)}_{\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$$

Donc $\quad v_p(x_1 + x_2) \geq n_1 = \operatorname{Min}(v_p(x_1), v_p(x_2))$

Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $n_1 \leq n_2$

$$x_1 + x_2 = p^{n_1} \frac{y_1}{z_1} + p^{n_2} \frac{y_2}{z_2} = p^{n_1} \left[\frac{y_1}{z_1} + p^{\overbrace{n_2 - n_1}^{\in \mathbb{N}}} \frac{y_2}{z_2} \right]$$

$$= p^{n_1} \times w \quad \text{avec } w \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

($\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous anneau de $\mathbb{Z}$)

Donc $v_p(x_1 + x_2) = v_p(p^{n_1} \times w)$
$= v_p(p^{n_1}) + v_p(w) = n_1 + \underbrace{v_p(w)}_{\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$

Donc $v_p(x_1 + x_2) \geqslant n_1 = \operatorname{Min}(v_p(x_1), v_p(x_2))$

Supposons $n_1 < n_2$

$$\frac{y_1}{z_1} + p^{\overbrace{n_2 - n_1}^{\in \mathbb{N} \setminus \{0\}}} \frac{y_2}{z_2} = \frac{\overbrace{\underbrace{y_1 z_2}_{\in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}} + p^{\overbrace{n_2 - n_1}^{>0}} \underbrace{y_2 z_1}_{\in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}}}^{\in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}}}{\underbrace{z_1 \cdot z_2}_{\in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}}} : \frac{u}{r}$$

Donc $x_1 + x_2 = p^{n_1} \times \frac{u}{r} \quad u, r \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$

Donc $v_p(x_1 + x_2) = n_1 = \operatorname{Min}(v_p(x_1), v_p(x_2))$ $\square$

Montrons que $\mathbb{Z}_{(p)}^\times = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)},\ v_p(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)}, \exists y, z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}, x = \frac{y}{z}\}$

$\subset$

Soit $x \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$
Soit $x' \in \mathbb{Z}_{(p)}$
tel que $x \times x' = 1$
$v_p(x \times x') = v_p(1) = 0$
donc
$\underbrace{v_p(x)}_{\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}} + \underbrace{v_p(x')}_{\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}} = 0$
donc $v_p(x) = 0$

$\supset$

découle de $(*)$

en effet, si x s'écrit $\frac{y}{z}$ avec $y, z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$,
alors $x \times \frac{z}{y} = 1$ or $y \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$
donc $\frac{z}{y} \in \mathbb{Z}_{(p)}$
donc $x \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n := p^n \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$

<u>Exemple</u> $I_0 = \mathbb{Z}_{(p)}$

(Mq) $I_n = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)},\ v_p(x) \geq n\}$

① "$\subset$" Soit $x \in I_n$. Soit $x' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $x = p^n \cdot x'$

Alors $v_p(x) = v_p(p^n) + v_p(x') = n + \underbrace{v_p(x')}_{\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}} \geq n$

② "$\supset$" Soit $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $v_p(x) \geq n$

Soit $y, z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ tels que $x = p^{v_p(x)} \frac{y}{z}$

On a $x = p^n \cdot \underbrace{p^{\overbrace{v_p(x) - n}^{\in \mathbb{N}}} \cdot \frac{y}{z}}_{\in \mathbb{Z}_{(p)}}$

Donc $x \in p^n \cdot \mathbb{Z}_{(p)} = I_n$

Soit I idéal non nul de $\mathbb{Z}_{(p)}$

$n := \operatorname{Min} \underbrace{\{v_p(x),\ x \in I \setminus \{0\}\}}_{\text{partie non vide de } \mathbb{N}}$

Montrons que $I = I_n$

"$\subset$" Par définition de n, $\forall x \in I,\ v_p(x) \geq n$

or $I_n = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)},\ v_p(x) \geq n\}$

donc $I \subset I_n$

"$\supset$" Comme I_n est l'idéal engendré par p^n,

il suffit de montrer que $p^n \in I$

Par définition de n et (*), il existe $x \in I \setminus \{0\}$, $y, z \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ tels que

$x = p^n \cdot \frac{y}{z}$

$x \neq 0$

donc $y \neq 0$

donc $p^n = \underbrace{\frac{z}{y}}_{\in \mathbb{Z}_{(p)}} \times \underbrace{x}_{\in I}$ car $\cancel{\frac{y}{z} \in \mathbb{Z}_{(p)}}$ Comme I est un idéal, $p^n \in I$

$$I_1 = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)}, v_p(x) \geq 1\}$$
$$\mathbb{Z}_{(p)}^\times = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)}, v_p(x) = 0\}$$

Donc $\mathbb{Z}_{(p)} \setminus I_1 = \mathbb{Z}_{(p)}^{(\times)}$

Proposition (cf exo 1.9) Soit A un anneau, I un idéal de A tels que $A \setminus I = A^\times$. Alors I est un idéal maximal. et I est l'unique idéal maximal de A

Démonstration I est propre car $A \setminus I = A^\times$ et $A^\times \neq \emptyset$

$1_A \in$

Soit J un idéal tel que $I \subset J$ et $I \neq J$

Montrons que $J = A$. Par hypothèse $J \cap (A \setminus I) \neq \emptyset$

donc $J \cap A^\times \neq \emptyset$ donc $J = A$

Conclusion : I est maximal

Soit I' un idéal maximal de A. Montrons que $I' = I$

Premier cas : $I' \subset I$. Par maximalité de I' (et le fait que I est propre)

on a $\boxed{I' = I}$

$\boxed{\text{Hyp } A \setminus I = A^\times}$

Deuxième cas I' n'est pas inclus dans I

Alors $I' \cap (A \setminus I) \neq \emptyset$ donc $I' \cap A^\times \neq \emptyset$

donc $I' = A$ contredit I' maximal

Conclusion I est le seul idéal maximal de A

Retour à 1.7.3 $I_1 = p\mathbb{Z}_{(p)}$ est l'unique idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$

Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}_{(p)}$? I_1 l'est car il est maximal et on montre que c'est le seul

$p \times p = \underbrace{p^2}_{\in I_2}$ donc I_2 n'est pas premier

$v_p(p) = 1$ donc $p \notin I_2 = \{x \in \mathbb{Z}_{(p)}, v_p(x) \geq 2\}$

Exo 1.9

1.9.1 Soit A un anneau.
Alors A est un corps
ssi $\begin{cases} \text{les seuls idéaux de } A \text{ sont } \{0\} \text{ et } A \\ \text{et } A \neq \{0\} \end{cases}$

qui est donc alors maximal

1.9.1 A local $\overset{?}{\iff}$ $A \setminus A^\times$ est un idéal

" $\Leftarrow$ " déjà vu. Posons $I := A \setminus A^\times$
On a $A \setminus I = A^\times$
donc (cf plus haut) I est l'unique idéal maximal de A

" $\Rightarrow$ " Supposons A local.
Soit I l'unique idéal maximal de A
Montrons que $I = A \setminus A^\times$
ou $A \setminus I = A^\times$
Soit $x \in A \setminus A^\times$. Montrons que $x \in I$
Dans ce cas $x \cdot A$ est un idéal propre.
D'après le cours, il existe J idéal maximal de A
tel que $x \cdot A \subset J$. Par hypothèse $J = I$
Donc $x \in I$
On a montré $A \setminus A^\times \subset I$
Et l'inclusion réciproque est vraie car I est propre

<u>Exemples</u> p nombre premier $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un anneau local

p, q nombres premiers distincts $\mathbb{Z}_{(p)} \not\simeq \mathbb{Z}_{(q)}$

<u>Proposition</u> Soit A, B des anneaux locaux isomorphes
Soit I l'unique idéal maximal de A
" J " B
Alors A/I et B/J sont des anneaux (corps) isomorphes.

Soit $\mathfrak{m}_p$ l'unique idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$ alors $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathfrak{m}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exo 1.8

$Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \{Id_{\mathbb{Z}}\}$

$Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ n \longmapsto n \end{array} \right\}$

$Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \emptyset$ (sinon $2 \times \varphi(\frac{1}{2}) = 1$ donc $2 \in \mathbb{Z}^{\times}$ contradiction)

$Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \{Id_{\mathbb{Q}}\}$

φ

$\boxed{n \in \mathbb{Z} \quad \varphi(n) = n}$

$n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ $\quad m \times \varphi(\frac{n}{m}) = \varphi(n) = n$

donc $\varphi(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}$

$Hom(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{Id_{\mathbb{R}}\}$

φ

(1) $\boxed{x \in \mathbb{Q} \quad \varphi(x) = x}$ $(*)$

(2)
$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x^2) = \varphi(x)^2 \geqslant 0 \\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2 \\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(y) \geqslant 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ \qquad \varphi(x+y) \geqslant \varphi(x) \\ \varphi \text{ est CROISSANTE} \end{array} \right.$$

(1) + (2) + densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ il existe $y_n \in \mathbb{Q}$

tels que $y_n \leq x \leq y_n + \frac{1}{n}$

(densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

$\lim_{n\,\infty} y_n = x$

donc (2) $\varphi(y_n) \leq \varphi(x) \leq \varphi(y_n + \frac{1}{n})$

donc (1) $y_n \leq \varphi(x) \leq y_n + \frac{1}{n}$

donc $\lim_{n\,\infty} y_n = \varphi(x)$

$\varphi \in Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ $\quad \forall x \in \mathbb{Z},\ \varphi(x) = x$?

Soit $x \in \mathbb{N}$ $\quad \varphi(x) = \varphi(x \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = x \cdot \varphi(1_{\mathbb{Z}}) = x \cdot 1_{\mathbb{1}} = x$

(1.5.1) Soit $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in A^{\mathbb{N}}$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \overset{?}{=} (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$$

$\underline{d} := \underline{b} \times \underline{c}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \times c_{n-k}$

$$= \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} b_k \times c_\ell$$

$\underline{e} = \underline{a} \times \underline{b}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad e_n = \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} a_k \times b_\ell$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}))_n = (\underline{a} \times \underline{d})_n = \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} a_k d_\ell$

$$= \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} a_k \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ \alpha+\beta=\ell}} b_\alpha c_\beta$$

$$= \sum_{\substack{k, \ell, \alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n \\ \alpha+\beta=\ell}} a_k b_\alpha c_\beta$$

(on a implicitement utilisé l'associativité de A)

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c})_n = (\underline{e} \times \underline{c})_n = \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} e_k c_\ell$$

$$= \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n}} \Big(\sum_{\substack{\delta, \gamma \in \mathbb{N} \\ \delta+\gamma=k}} a_\delta b_\gamma \Big) c_\ell$$

$$= \sum_{\substack{k, \ell, \delta, \gamma \in \mathbb{N} \\ k+\ell=n \\ \delta+\gamma=k}} a_\delta b_\gamma c_\ell$$

$$\sum_{\substack{k,l,\delta,\gamma\in\mathbb{N}\\ k+l=n\\ \delta+\gamma=k}} a_\delta b_\gamma c_l \overset{?}{=} \sum_{\substack{k,l,\alpha,\beta\in\mathbb{N}\\ k+l=n\\ \alpha+\beta=l}} a_k b_\alpha c_\beta$$

$$\left\{(k,l,\delta,\gamma)\in\mathbb{N}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} k+l=n\\ \delta+\gamma=k\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{(l,\delta,\gamma)\in\mathbb{N}^3 \;\middle|\; \delta+\gamma+l=n\right\}$$

$$(k,l,\delta,\gamma) \longmapsto (l,\delta,\gamma)$$

$$(\delta+\gamma,l,\delta,\gamma) \longmapsfrom (l,\delta,\gamma)$$

$$\sum_{\substack{k,l,\delta,\gamma\in\mathbb{N}\\ k+l=n\\ \delta+\gamma=k}} a_\delta b_\gamma c_l = \sum_{\substack{l,\delta,\gamma\in\mathbb{N}\\ \delta+\gamma+l=n}} a_\delta b_\gamma c_l$$

$$\|$$

$$\sum_{\substack{k,l,\alpha,\beta\in\mathbb{N}\\ k+l=n\\ \alpha+\beta=l}} a_k b_\alpha c_\beta = \sum_{\substack{k,\alpha,\beta\in\mathbb{N}\\ k+\alpha+\beta=n}} a_k b_\alpha c_\beta$$

(Exo 1.9.3)

Soit p, q premiers distincts

Montrons que $\mathbb{Z}_{(p)}$ et $\mathbb{Z}_{(q)}$ ne sont pas isomorphes

en montrant $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_{(q)}) = \emptyset$

<u>Indication</u> Soit φ. Montrer $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n) = n$ (cf 1.8..)

Considérer $\varphi(q)$ et aboutir à une contradiction

en utilisant la description de $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ et $\mathbb{Z}_{(q)}^\times$