$A = \mathbb{Q}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$$\varphi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$n \longmapsto n \cdot 1_{\mathbb{Q}} = n \cdot 1_{\mathbb{Z}} = n$$

$\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathbb{Q}}) = \{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$ donc $\mathrm{car}(\mathbb{Q}) = 0$

idem pour $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, ....

$n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\underset{\varphi_n}{\overset{\shortparallel}{\varphi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\qquad$ morphisme quotient

$$x \longmapsto \underset{\varphi_n(x)}{\overset{\shortparallel}{[x]_n}}$$

1) $\varphi_n$ surjectif

2) $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = n\mathbb{Z}$

« $x$ modulo $n$ »

$$[x]_n = x \cdot [1]_n = x \cdot 1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

donc $\mathrm{car}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$

$$\boxed{A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$$

$$\varphi_A : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto ([x]_2, [x]_4)$$
$$= (x \cdot 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}, x \cdot 1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}})$$
$$= x \cdot (1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}})$$
$$= x \cdot 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \varphi_A(x)$$

$x \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathrm{Ker}(\varphi_A) \iff ([x]_2, [x]_4) = ([0]_2, [0]_4)$

$$\iff \begin{cases} [x]_2 = [0]_2 \\ [x]_4 = [0]_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in 2\mathbb{Z} \\ x \in 4\mathbb{Z} \end{cases} \iff x \in 4\mathbb{Z}$$

$\mathrm{Ker}(\varphi_A) = 4\mathbb{Z}$

$\mathrm{car}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 4$

$A$ anneau

$A[X]$ = anneau qui contient $A$ comme sous anneau
et un élément $X$ (l'"indéterminée")
tel que les propriétés suivantes sont vraies :

1) Pour tout $P \in A[X]$ il existe $d \in \mathbb{N}$
et des éléments $a_0, \dots, a_d \in A$ tels que
$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

2) Soit $P \in A[X]$, $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_d \in A$ tels que
$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ ; alors $P = 0 \iff a_0 = a_1 = \dots = a_d = 0$

$P, Q \in A[X]$ $\quad P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \quad d \in \mathbb{N} \quad a_0, \dots, a_d \in A \quad \deg(P) \leq d$

$Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \quad e \in \mathbb{N} \quad b_0, \dots, b_e \in A$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{d+e} \left( \sum_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq e \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

$$P + Q = \sum_{i=0}^{d} (a_i + b_i) X^i$$

Remarque
On peut (si nécessaire) supposer $d = e$
Si par exemple $d < e$
On pose $a_{d+1} = \dots = a_e = 0$

$A[[X]]$ est un anneau
qui contient $A[X]$ comme sous anneau
(donc $A$ ″ )
et tel que tout élément $P$ s'écrit « formellement »

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \quad \text{où} \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$$

de sorte que 1) $P = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i = 0$

2) S'il existe $d$ tel que $\forall i \geq d+1, \ a_i = 0$
alors $P$ est égal au polynôme $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

et tel que : si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ $(a_i) \in A^{\mathbb{N}}$ $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ $(b_i) \in A^{\mathbb{N}}$

alors $P + Q = \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) X^i$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big( \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) X^k \quad \text{(produit de Cauchy)}$$

→ détermine un ensemble fini d'éléments $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

Ex $\quad X^2 \times \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^{i+2} = \sum_{i=2}^{+\infty} a_{i-2} X^i$

$(a_i) \in A^{\mathbb{N}}$

$A = \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C} \subsetneq \mathbb{C}[X] \subsetneq \mathbb{C}[[X]]$

$B$ anneau
$A$ sous anneau de $B$
$A^\times \subset B^\times$ toujours vrai
inclusion stricte en général

$$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}[X]^\times = \mathbb{C}^\times \subsetneq \mathbb{C}[[X]]^\times$$

$1 - X \notin \mathbb{C}[X]^\times$ $\qquad$ $1 - X \in \mathbb{C}[[X]]^\times$

en effet $\quad (1 - X) \sum_{k=0}^{+\infty} X^k = 1$

$X \notin \mathbb{C}[[X]]^\times$

$$(1-X)\sum_{k=0}^{+\infty} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} X^k - X\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} X^k - \sum_{k=0}^{+\infty} X^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} X^k - \sum_{k=1}^{+\infty} X^k$$
$$= 1$$

A anneau

$P, Q \in A[X]$

Montrons qu'on a : $\deg(P+Q) \leq \mathrm{Max}(\deg(P), \deg Q)$
avec égalité Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$

⚠ ce n'est pas un SSi

<u>Exemples</u> $A = \mathbb{C}$ $P = X$ $Q = X+1$ $\deg(P) = \deg(Q) = 1$
et $\deg(P+Q) = 1$
$P = X$ $Q = -X+1$ $\deg(P) = \deg(Q) = 1$
$\deg(P+Q) = 0$

Si $P = 0$ $\deg(P+Q) = \deg(Q)$ $\deg(P) = -\infty$
$\mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q)) = \deg(Q)$
donc on a égalité

Même chose si $Q = 0$

Supposons $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ Soit $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$
$e = \deg(Q) \in \mathbb{N}$

Soit $a_0, \dots, a_d \in A$ tels que $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $a_d \neq 0$

$b_0, \dots, b_e \in A$ " $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i$ $b_e \neq 0$

Quitte à échanger $P$ et $Q$, on peut supposer $\boxed{d \geq e}$

$P+Q = \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot X^i$ $(*)$ avec pour $0 \leq i \leq d$ $c_i = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i \leq e \\ a_i & \text{si } i > e \end{cases}$

Si $e < d$ On a $c_d = a_d$ donc $c_d \neq 0$ car $a_d \neq 0$
et $(*)$ montre que $\deg(P+Q) = d = \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$

Si $e = d$ $(*)$ montre que $\deg(P+Q) \leq d = \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$

$A$ anneau

$a \in A$ $\quad ev_a : \begin{array}{ccc} A[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ morphisme d'anneaux

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\alpha_i a^i}$$

ces termes sont tous nuls sauf un nombre fini

avec $(\alpha_i)$ suite presque nulle d'éléments de $A$

$$\sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \cdot a^i$$

$d \in \mathbb{N}$ $\quad (\alpha_i) \in A^{d+1}$

<u>Calcul de $\mathrm{Ker}(ev_a)$</u> Montrons que $\mathrm{Ker}(ev_a) = (X-a).A[X]$

① $X - a \in \mathrm{Ker}(ev_a)$ en effet $ev_a(X-a) = a - a = 0$

② Comme $X-a \in \mathrm{Ker}(ev_a)$ et $(X-a).A[X]$ est l'idéal engendré par $X-a$, on déduit de ① que $(X-a).A[X] \subset \mathrm{Ker}(ev_a)$

③ Montrons $\mathrm{Ker}(ev_a) \subset (X-a).A[X]$ Soit $P \in \mathrm{Ker}(ev_a)$

Comme $X-a$ est un polynôme dont le coefficient dominant est inversible

il existe $Q, R \in A[X]$ tels que a) $P = Q(X-a) + R$

b) $\deg(R) < \deg(X-a) = 1$

D'après b) il existe $b \in A$ tel que $R = b$

On a $0 = ev_a(P) = ev_a(Q.(X-a) + b)$

$$= ev_a(Q).\underbrace{ev_a(X-a)}_{=0} + ev_a(b)$$

$$= 0 + b = b \quad \text{donc } b = 0$$

donc $P = Q.(X-a) + 0 = Q(X-a)$ donc $P \in (X-a).A[X]$

Division euclidienne de $X$ par $2X$ ?

Existe-t-il $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

a) $X = 2X \cdot Q + R$

b) $\deg(R) < \deg(2X) = 1$

Supposons que ça existe. Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $R = b$

$X = 2X \cdot Q + b$ On doit avoir $Q \neq 0$

$\deg(2X \cdot Q) = \deg(2X) + \deg(Q)$

$\geq \deg(2X) = 1$

$\deg(2X \cdot Q + b) = \deg(X) = 1$

donc $\deg(2X \cdot Q) = 1$ donc $\deg(Q) = 0$

donc il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $Q = c$

donc $X = 2cX + b$

donc $1 = 2c$ contradiction

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \times \mathbb{C} = \mathbb{C}$$
$\underset{z}{\in}$

« Un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{C})$ est entièrement déterminé par la donnée :

1) ~~d'un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$~~ »
2) d'un élément de $\mathbb{C}$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(z) \end{array}$$

$A$ anneau $\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X], A) \text{ « = » } A \qquad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) = \{\varphi_A\}$

$$ev_a \longleftarrow a$$

où $ev_a : \sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{d} \varphi_A(\alpha_i) . a^i$

$(\alpha_i) \in \mathbb{Z}^{d+1}$
$d \in \mathbb{N}$

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & n . 1_A \end{array}$$

$$A[X,Y] = (A[X])[Y] = (A[Y])[X]$$

<u>Exemple</u> $\mathbb{C}[X,Y]$

$p^4$

$$P = \sum_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}} a_{i,j} X^i Y^j \qquad a_{i,j} \in \mathbb{C}$$

$d \in \mathbb{N}$

$$P = 1 + XY + X^2$$

$$= 1 + Y.X + X^2 = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i \qquad a_0 = 1,\ a_1 = Y,\ a_2 = 1$$

$$= (1+X^2) + X.Y = \sum_{i=0}^{1} b_i Y^i \qquad b_0 = 1 + X^2,\ b_1 = X$$

$\deg_X(P)$ = degré vu comme polynôme en l'indéterminée $X$ à coefficients dans $\mathbb{C}[Y]$

$= 2$

$\deg_Y(P) = 1$

Division euclidienne par $P$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ ?

Oui si on regarde $P$ comme un élément de $(\mathbb{C}[Y])[X]$

Si $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X,Y]$ il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que

(1) $\tilde{P} = Q.P + R$

(2) $\deg_X(R) < \deg_X(P)$

$\cancel{\deg_Y(R) < \deg_Y(P)}$

$P$, vu comme élément de $(\mathbb{C}[X])[Y]$, a pour coefficient dominant $X$ et $X \notin \mathbb{C}[X]^\times$

On se place dans $\mathbb{C}[X,Y]$

On considère $I = \langle X, Y \rangle = X \cdot \mathbb{C}[X,Y] + Y \cdot \mathbb{C}[X,Y]$

<u>à montrer</u> non $\left( \exists P \in \mathbb{C}[X,Y],\ I = P \cdot \mathbb{C}[X,Y] \right)$

Par l'absurde supposons est vrai

$X \in I$ donc $\exists Q_1 \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $X = P.Q_1$

$Y \in I$ $\exists Q_2 \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $Y = P.Q_2$

$X = P.Q_1$ donc $\deg_X(X) = 1 = \deg_X(P) + \deg_X(Q_1)$

$\deg_Y(X) = 0 = \deg_Y(P) + \deg_Y(Q_1)$

donc $\deg_Y(P) = 0$

$Y = P Q_2$ $\deg_X(Y) = 0 = \deg_X(P) + \deg_X(Q_2)$

donc $\deg_X(P) = 0$

Donc $\deg_X(P) = \deg_Y(P) = 0$ Donc $P \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}[X,Y]^\times$

Donc $I = P.\mathbb{C}[X,Y] = \mathbb{C}[X,Y]$

Contradiction car $I = \langle X, Y \rangle \subsetneq \mathbb{C}[X,Y]$

En effet si $R \in I$, on a $R(0,0) = 0$

$\mathbb{C}^\times \cap \langle X, Y \rangle = \emptyset$