Proposition : Soit A un anneau, I un idéal maximal de A.
Alors I est un idéal premier de A.

<u>Démonstration</u> Il faut montrer

① I est propre (?) : oui, car un idéal maximal est propre par définition

② $\forall x \in A \ \forall y \in A \quad xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$ (?)

Soit $x, y \in A$ tels que $xy \in I$.
Montrons que $x \in I$ ou $y \in I$.
Supposons que $x \notin I$ et montrons que $y \in I$

Soit $\boxed{J \text{ l'idéal engendré par } I \text{ et } x}$.
J contient I et même : J contient strictement I
En effet $x \in J \setminus I$.

l'idéal engendré par $I \cup \{x\}$

Or I est maximal, donc $J = A$.

<u>Application de la proposition 23</u>
$$\Big(S, T \subset A \qquad \underbrace{(S \cup T) . A}_{\substack{\text{idéal de } A \\ \text{engendré par } S \cup T}} = S.A + T.A \Big)$$

$$\boxed{S = I \qquad T = \{x\}} \qquad \boxed{J = (S \cup T).A \ (\text{par définition})}$$

Donc $J = S.A + T.A = I.A + x.A$
Or $I.A = I$ (I est clairement le plus petit idéal de A qui contient I)
Donc $J = I + x.A$

Or $J = A$ en particulier $1 \in J$

Donc $J = I + x.A$

Or $J = A$ en particulier $1 \in J$

Donc il existe $z \in I$ et $t \in A$ tel que

$$1 = z + x.t$$

donc $y = \underbrace{\underbrace{y \times \underbrace{z}_{\in I}}_{\text{donc } \in I} + \underbrace{\underbrace{(x \times y)}_{\in I \text{ (par hypothèse)}}.t}_{\text{donc } \in I}}_{\text{donc } \in I}$

Conclusion : $y \in I$ $\square$

Aparté Si $x_1, x_2 \in A$. On dit souvent « Soit I l'idéal engendré par x_1 et x_2 » plutôt que « Soit I l'idéal engendré par $\{x_1, x_2\}$ »

⚠ L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est plus compliqué que $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{Q}[X]$)

$\langle 2, X \rangle = 2.\mathbb{Z}[X] + X.\mathbb{Z}[X] \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (c'est-à-dire engendré par un seul élément)

$2 \notin \mathbb{Z}[X]^\times = \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$

$\langle X \rangle = X.\mathbb{Z}[X]$ est premier, non nul, n'est pas maximal

Sur $\mathbb{Q}[X]$: $\langle 2, X \rangle = 2\,\mathbb{Q}[X] + X\,\mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[X]$

$2 \in \mathbb{Q}[X]^\times = \mathbb{Q}^\times$

A_1, A_2 des anneaux

$A_1 \times A_2$ n'est presque jamais intègre

Si $A_1 \neq \{0\}$ et $A_2 \neq \{0\}$
alors $A_1 \times A_2$ n'est pas intègre

$$(1_{A_1}, 0_{A_2}) \times (0_{A_1}, 1_{A_2}) = (0_{A_1}, 0_{A_2}) = 0_{A_1 \times A_2}$$

$$1_{A_1} \neq 0_{A_1} \qquad 1_{A_2} \neq 0_{A_2}$$

A anneau

$A[X] =$ anneau qui contient A comme sous anneau
et un élément X (l'indéterminée)
tel que les propriétés suivantes sont vraies :

1) Le sous anneau de $A[X]$ engendré par A et X est $A[X]$

2) Soit $P \in A[X]$, d'après 1), il existe $d \in \mathbb{N}$ et des éléments $a_0, \dots, a_d \in A$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

et alors $P = 0 \iff a_0 = a_1 = \dots = a_d = 0$

$P, Q \in A[X]$ $\quad P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \quad d \in \mathbb{N}, \; a_0, \dots, a_d \in A$

$Q = \sum_{i=0}^{e} b_i X^i \quad e \in \mathbb{N}, \; b_0, \dots, b_e \in A$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{d+e} \Bigg(\sum_{\substack{0 \le i \le d \\ 0 \le j \le e \\ i+j=k}} a_i b_j \Bigg) X^k$$

$A[[X]]$ est un anneau

qui contient $A[X]$ comme sous anneau

(donc A ")

et tel que tout élément P s'écrit "formellement"

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \quad \text{où} \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$$

de sorte que 1) $P = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i = 0$

2) S'il existe d tel que $\forall i \geq d+1, \ a_i = 0$

alors P est égal au polynôme $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

et tel que : si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ $(a_i) \in A^{\mathbb{N}}$ $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ $(b_i) \in A^{\mathbb{N}}$

alors $P + Q = \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) X^i$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ j\in\mathbb{N} \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) X^k \quad \text{(produit de Cauchy)}$$

$\longrightarrow$ déterminent un ensemble fini d'éléments $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

Proposition Soit B un anneau
A un sous anneau de B
$x \in B$

Soit C le sous-anneau de B engendré par A et x (engendré par $A \cup \{x\}$)

Alors pour tout $b \in B$, on a équivalence entre
1) $b \in C$
2) il existe $d \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_d \in A$ tels que $b = \sum_{i=0}^{d} a_i . x^i$

Démonstration (esquisse) Soit D l'ensemble des éléments de A qui s'écrivent comme en 2) (avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_d$ arbitraires)

On montre : 1) D contient A $(a \in A \quad a = a \times x^0)$
1)' D contient x $(x = \underset{\in A}{1} \times x^1)$

Initialisation
$\forall a_0 \in A, a_0 x x^0 \in D'$

2) D est un sous anneau de B
3) Soit D' un sous anneau de B qui contient A et x. Alors D' contient D

(récurrence sur d $\quad d=0$ D' contient A ok
Hérédité : $a_0, ..., a_{d+1} \in A$

$\sum_{i=0}^{d+1} a_i x^i \in D'$?

$x \in D'$ sous anneau donc $\forall d \in \mathbb{N}, x^d \in D'$

$$\underset{\in D'}{\sum_{i=0}^{d+1} a_i x^i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{d} a_i x^i}_{\in D' \text{ par hypothèse de récurrence}} + \underbrace{\underset{\in A \subset D'}{a_{d+1}} . \underset{\in D'}{x^{d+1}}}_{\in D'}$$