Exo 1.2.2

$B_1 \subset B_2 \subset A$ $\quad$ $B_1 \cup B_2 = B_2$

B_1, B_2 sous anneaux de A $\quad$ $B_1 + B_2 = B_2$

$B_1 = \mathbb{C}$

$A = \mathbb{C}[X]$

$B_2 = \mathbb{R}[X]$

$i \in B_1 \setminus B_2$

$X \in B_2 \setminus B_1$

$B_1 + B_2$, $B_1 \cup B_2$ ne sont pas des sous anneaux de $\mathbb{C}[X]$

$\boxed{B_1 \cup B_2}$ $\quad C := B_1 \cup B_2 \subset \mathbb{C}[X]$

? $P, Q \in C$ tels que $P + Q \notin C$?

$P, Q \in C$ tels que $P \times Q \notin C$?

$P \in C$ tel que $-P \notin C$?

$0 \notin C$?

$1 \notin C$?

$P = X \quad Q = i \qquad P + Q \notin C$

$P = X \quad Q = i \qquad P \times Q \notin C$

$P \in \mathbb{R}[X]$ donc $P \in C$ $\qquad P + Q = X + i \begin{array}{l} \notin \mathbb{C} \\ \notin \mathbb{R}[X] \end{array} \quad i \notin \mathbb{R}$

$Q \in \mathbb{C}$ donc $Q \in C$

$\boxed{B_1 + B_2}$ $\quad D = B_1 + B_2$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$

$P = X \quad Q = i \qquad P \in \mathbb{R}[X]$ donc $P \in \mathbb{C} + \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{C} = B_1 \subset B_1 + B_2 \qquad Q \in \mathbb{C}$ donc $Q \in \mathbb{C} + \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X] = B_2 \cup$

$P \times Q = iX \notin \mathbb{C} + \mathbb{R}[X]$

non $\left(\exists \alpha \in \mathbb{C}, \exists P_1 \in \mathbb{R}[X], \ iX = \alpha + P_1\right)$

↳ un tel élément a nécessairement son coefficient de X réel or $i \notin \mathbb{R}$

Exo 1.2.5 (a) I, J des idéaux de A

$$I \cdot J \underset{\substack{\neq \\ \text{en général}}}{\supset} \{x \times y\}_{\substack{x \in I \\ y \in J}} = S$$

dépend de a

Soit $a \in I.J$. Alors il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \dots, x_m \in I$
$y_1, \dots, y_m \in J$ tels que $a = \sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i$

Soit $a, b \in I.J$. Alors il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$x_1, \dots, x_m \in I$ $y_1 \dots y_m \in J$ tels que $a = \sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i$
$z_1, \dots, z_m \in I$ $t_1, \dots, t_m \in J$ $b = \sum_{i=1}^{m} z_i \times t_i$

$a = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$
$b = z_1 t_1 + z_2 t_2 + 0 \times 0$

$z_3 = 0$
$t_3 = 0$

Montrons que $\forall a \in I.J$ $\forall b \in I.J$ $a + b \in I.J$
Soit $a, b \in I.J$

$$a + b = \sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i + \sum_{i=1}^{m} z_i \times t_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w_i \times u_i$$

$m = 2n$

$1 \leq i \leq 2n$ $w_i := \begin{cases} x_i & \text{si } i \leq n \\ z_{i-n} & \text{si } i \geq n+1 \end{cases}$

$u_i := \begin{cases} y_i & \text{si } i \leq n \\ t_{i-n} & \text{si } i \geq n+1 \end{cases}$

1.2.5 (b)

I_1, I_2, I_3 $\qquad$ $\underbrace{I_1 + I_2 + I_3}_{\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{3} I_i}} := \underbrace{\underbrace{(I_1 + I_2)}_{\text{déjà défini}} + I_3}_{\text{somme de deux idéaux}}$

égalité de définition

$n \geqslant 3$ $\quad I_1, \dots, I_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} I_i := \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)}_{\substack{\text{déjà défini} \\ \text{« au rang précédent »}}} + I_{n+1}$$

? $\left(\begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 := (I_1 + I_2) + I_3 \\ I_1 + I_3 + I_2 := (I_1 + I_3) + I_2 \end{array}\right.$

Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} I_i$ est l'ensemble des éléments a de A qui vérifient la propriété suivante :
Il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in I_i$ et $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

$$(I_1 + I_2) + I_3 = (I_1 + I_3) + I_2$$

$$\sum_{e \in E} I_e = \{a \in A,\ \exists (x_e) \in A^E \ \begin{array}{l} 1)\ \forall e \in E \quad x_e \in I_e \\ 2)\ \{e \in E,\ x_e \neq 0\} \overset{= F}{} \text{ est fini} \\ 3)\ a = \sum_{e \in E} x_e \ \left(= \sum_{e \in F} x_e\right) \end{array}$$

$\varphi : A \to B$

Exercice 1.4

1.4.2 Soit $a \in A$.

On considère la propriété $\boxed{P_n : \text{« } \varphi(a^n) = \varphi(a)^n \text{ »}}$ $n \in \mathbb{N}$

Montrons que P_0 est vraie.

$a^0 = 1_A$ (par définition) On $\varphi(1_A) = 1_B$ (car φ est un morphisme d'anneaux)

$\varphi(a)^0 = 1_B$

Donc P_0 est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.

Montrons que P_{n+1} est encore vraie.

$\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a \times a^n)$ (par définition des puissances dans un anneau)

$= \varphi(a) \times \varphi(a^n)$ (car φ est un morphisme d'anneaux)

$= \varphi(a) \times \varphi(a)^n$ (d'après P_n)

$= \varphi(a)^{n+1}$ (par définition des puissances dans un anneau)

Donc P_{n+1} est vraie (conclusion ...)

1.4.5 Montrons que $\varphi(A^\times) \subset B^\times$

Soit $b \in \varphi(A^\times)$ Montrons que $b \in B^\times$

Il existe $a \in A^\times$ tel que $b = \varphi(a)$

Comme $a \in A^\times$, il existe $a^- \in A$ tel que $a \times a^- = 1_A$

On a $1_B = \varphi(1_A)$ (car φ est un morphisme d'anneaux)

$= \varphi(a \times a^-)$

$= \varphi(a) \times \varphi(a^-)$ "

$= b \times \varphi(a^-)$

Donc $1_B = b \times \varphi(a^-)$ et $\varphi(a^-) \in B$

Donc $b \in B^\times$ On a montré en fait

$(\forall a \in A^\times, \ \varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}))$

$A \subset B$ $\quad A$ sous anneau de B

$$\varphi : A \longrightarrow B \quad \text{morphisme d'anneaux}$$
$$a \longmapsto a$$

Si l'inclusion de 1.5.5 est une égalité par φ,

cela signifie $A^\times = B^\times$

$$A = \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}^\times = \{1, -1\} \subsetneq \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$B = \mathbb{R}$$

1.7.1

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi\}_{a,b\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$$
$$= \{z\in\mathbb{C},\ Re(z)\in\mathbb{Z},\ Im(z)\in\mathbb{Z}\}$$

anneau des entiers de Gauß

à montrer $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$

$\mathbb{Z}[i]$ intègre ? $\mathbb{C}$ est intègre

$$\varphi : (\mathbb{Z}[i], +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}^2, +)$$
$$a+ib \longleftarrow (a,b)$$

existe-t-il un tel isomorphisme de groupes ?

$$(\mathbb{Z}[i], +, \times) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}^2, +, \times)$$

existe-t-il un tel isomorphisme d'anneaux ?

$\mathbb{Z}[i]$ est intègre

$\mathbb{Z}^2$ ne l'est pas $\quad \underset{\neq (0,0)}{(1,0)} \times \underset{\neq (0,0)}{(0,1)} = (0,0) = 0_{\mathbb{Z}^2}$

On a : Soit A et B des anneaux isomorphes,
alors A est intègre ssi B est intègre

1.7.1(b)

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P(X) & \longmapsto & P(i) \\ \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot X^n & \longmapsto & \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot i^n \end{array}$$

$d \in \mathbb{N}$

$a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(\mathbb{Z}[X]) \overset{?}{=} \mathbb{Z}[i]$$

« Soit A un anneau .. »

« L'ensemble sous jacent à A »

« Soit $(A, +, \times)$ un anneau ... »

ensemble — lois de composition interne

Déf L'ensemble sous jacent à $(A, +, \times)$ est A

Déf Le groupe additif sous-jacent à $(A, +, \times)$ est $(A, +)$

1.4.3 $\varphi : A \to B$ morphisme d'anneaux bijectif

$\varphi^{-1} : B \to A$ application réciproque

Comme φ est bijectif (injectif) $\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A, \; a_1 = a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$

$\Rightarrow$ toujours vrai

$b_1, b_2 \in B$

$$\underset{\in A}{\varphi^{-1}(b_1 + b_2)} \overset{?}{=} \underbrace{\varphi^{-1}(b_1) + \varphi^{-1}(b_2)}_{\in A}$$

Il suffit de montrer $\varphi\big(\underset{= b_1 + b_2}{\varphi^{-1}(b_1 + b_2)}\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(b_1) + \varphi^{-1}(b_2)\big)$

Déf Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

On dit que φ est un isomorphisme (d'anneaux) s'il existe $\psi : B \to A$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi \circ \varphi = Id_A$ et $\varphi \circ \psi = Id_B$

(Rq nécessairement, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$)