Soit A un anneau.

Soit B_1 et B_2 deux sous-anneaux de A.

Montrons que $B_1 \cap B_2$ est un sous anneau de A.

Soit x, y des éléments de $B_1 \cap B_2$

On va montrer
1) $x+y \in B_1 \cap B_2$
2) $-x \in B_1 \cap B_2$
3) $x \times y \in B_1 \cap B_2$

1) $x, y \in B_1 \cap B_2$ donc $x \in B_1$ $y \in B_1$

On B_1 est un sous anneau de A

En particulier, $(B_1, +)$ est un sous groupe de A

donc $x+y \in B_1$

« Même » raisonnement avec B_2. On obtient $x+y \in B_2$

donc $\boxed{x+y \in B_1 \cap B_2}$

On montre aussi 2) et 3)

Il reste à montrer : $0_A \in B_1 \cap B_2$
$1_A \in B_1 \cap B_2$

124 A anneau

I_1, I_2 deux idéaux de A

? $I_1 \cap I_2$ est un idéal de A

À montrer : 1) $0_A \in I_1 \cap I_2$

2) Soit $x, y \in I_1 \cap I_2$

a) $x + y \in I_1 \cap I_2$

b) $-x \in I_1 \cap I_2$

c) $\boxed{\forall z \in A,\ z \times x \in I_1 \cap I_2}$

différence avec les sous anneaux

Rappel $A = \mathbb{Z}$

Sous anneaux de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$

idéaux de $\mathbb{Z}$: $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$n\mathbb{Z} = \{n.m\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

1.2.3 à montrer

$\Updownarrow$ 1) $I = A$

2) $1_A \in I$

3) $I \cap A^\times \neq \emptyset$

$\exists x \in I, \exists y \in A, x \times y = 1_A$ (*)

$1_A \times 1_A = 1_A$

$1_A \in A^\times$

donc $2) \Rightarrow 3)$ est vraie

$1) \Rightarrow 2)$ est vraie $(1_A \in A)$

Montrons $3) \Rightarrow 1)$ ($\not\Rightarrow$ 2) $\searrow$)

D'après (*) et le fait que I est un idéal, on a $1_A \in I$

Montrons qu'on a $A = I$ ($I \subset A$ est toujours vraie)

Montrons $A \subset I$

Soit $x \in A$. On a $1_A \in I$

$$x = x \times 1_A \in I \quad \square$$

A, B deux anneaux

$A \times B$

$$A\times A \longrightarrow A$$
$$(a_1,a_2) \longmapsto a_1 + a_2$$

$$(A\times B)\times(A\times B) \longrightarrow A\times B$$

$x_1 \in A$
$x_2 \in A$

$$((x_1,y_1)(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$\in A$

$$((x_1,y_1)(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1 \times x_2, y_1 \times y_2)$$

$$A\times B \longrightarrow B$$
$$\pi_B : (x,y) \longmapsto y$$

π_B morphisme d'anneaux ?

1) $\forall (x_1,y_1) \in A\times B \quad \forall (x_2,y_2) \in A\times B$

$$\pi_B((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = \pi_B(x_1,y_1) + \pi_B(x_2,y_2)$$

2) même chose en remplaçant + par $\times$

3) $\pi_B(1_{A\times B}) = 1_B$

$$1_{A\times B} = (1_A, 1_B)$$

$$(A\times B)^\times = A^\times \times B^\times$$

$\cap$

$A\times B$

produit de groupes

groupe pour la loi $\times$ sur $A\times B$

égalité « de groupes »

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\mathbb{Z}^\times = \{1,-1\}$

$(A_e)_{e \in E}$ sous anneaux de A

$x, y \in \bigcap_{e \in E} A_e$ $\quad x+y \overset{?}{\in} \bigcap_{e \in E} A_e$

à montrer : $\forall e \in E,\ x+y \in A_e$

$\boxed{\text{Soit } f \in E}$ Montrons que $x+y \in A_f$

On a $x \in \bigcap_{e \in E} A_e$ donc $x \in A_f$

$y \in \bigcap_{e \in E} A_e$ donc $y \in A_f$

or $(A_f, +)$ est un sous groupe de A

donc $x+y \in A_f$

$\overset{A}{\mathbb{Z}} \times \overset{B}{\mathbb{Z}}$

$x \in A$

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad (x, 0) \times (0, y) = (0,0) = 0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$

$y \in B$

$x \neq 0$

$y \neq 0$

$(x,0) \neq 0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \neq 0_{A \times B}$ $\quad (0,y) \neq 0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \neq 0_{A\times B}$ $\quad 0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = 0_{A\times B}$

~~A intègre~~
~~B~~

$\boxed{\begin{array}{l} A \times B \text{ intègre} \\ \Rightarrow \begin{cases} (1)\ A = \{0\} & B \text{ intègre} \\ \text{ou} & \\ (2)\ A \text{ intègre} & B = \{0\} \end{cases} \end{array}}$

$A = \{0\}$ $\quad A \times B = \{0\} \times B \simeq B$

ou $B = \{0\}$

$$\underline{B_1 \subset B_2} \subset A$$

$$\cancel{B_1 = \mathbb{Q}}$$
$$\cancel{B_2 = \mathbb{R}}$$

$$B_1 = \mathbb{R} \subset A = \mathbb{C}[X]$$
$$B_2 = \mathbb{Q}[X] \subset$$