Université de Rennes 1 Année universitaire 2020-2021
Licence de mathématiques
Module Anneaux et arithmétique

Examen terminal
(première session)
Mardi 20 avril 2021, 11h – 13h

La qualité et l'*originalité* de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part *cruciale* de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les affirmations doivent être soigneusement justifiées.* Les questions jugées plus délicates sont indiquées par **(*)**.
On rappelle que le travail pour cette épreuve à distance doit se faire de façon individuelle et sans aide extérieure, et en particulier :
- sans communiquer avec qui que ce soit ;
- sans chercher aucune information sur internet ou dans toute autre documentation (y compris les documents spécifiques de cours et de TD d'ANAR) ;
- sans utiliser de calculatrice ou tout autre outil d'aide au calcul.

Exercice 1

Expression écrite libre *(Temps à consacrer à cet exercice : **40 minutes** environ)*
J'aimerais que vous me racontiez un peu ce que vous avez retenu du contenu mathématique du cours d'ANAR.
- Aucune sorte d'exhaustivité n'est attendue : vous pouvez rédiger une réponse synthétique ou au contraire vous concentrer sur une ou plusieurs parties spécifiques du cours.
- Vous pouvez insister sur ce qui vous a plu et/ou marqué(e), voire sur ce qui ne vous a pas plu, voire même sur ce que vous n'avez pas compris, en essayant d'expliquer et d'illustrer pourquoi.
- Vous pouvez vous appuyer sur des résultats du cours (en tâchant d'expliquer pourquoi vous choisissez ces résultats) que vous pouvez entre autres illustrer d'exemples ou contre-exemples qui vous semblent significatifs (en tâchant d'expliquer pourquoi).
- Vous pouvez (ou non) vous appuyer sur des démonstrations, que vous pouvez par exemple tâcher de commenter.

Tout ce qui précède n'est qu'*indicatif* et *tout ce que vous avez à me restituer sur le contenu mathématique du cours sera favorablement accueilli* du moment que vous tâchez de l'exprimer avec soin. J'attends avant tout une expression mathématique claire et maîtrisée, et un discours suffisamment *motivé* et *organisé.* Notez enfin que *dans cet exercice, vous pouvez, de manière générale, vous affranchir de la consigne « toutes les affirmations doivent être soigneusement justifiées »*, mais que vous pouvez appuyer votre discours sur des arguments mathématiques précis ou sur des esquisses d'arguments.

Exercice 2

Corps finis *(Temps à consacrer à cet exercice : **40 minutes** environ)*
Racontez moi ce que vous savez sur les corps de cardinal 16 (comment les construire, calculer dedans, si possible avec des exemples explicites, quels sont leurs sous-corps, leurs extensions, ou toute autre propriété qui vous semble pertinente). Si cela vous semble trop dur, faites l'exercice avec les corps de cardinal 8, voire 4 (et dans l'idéal, tâchez alors de m'expliquer pourquoi le cas de cardinal 16 vous semble trop dur). *Contrairement à l'exercice précédent, des justifications soigneuses sont attendues tout au long de votre exposé.* Mais comme pour l'exercice précédent, j'attends avant tout une expression mathématique claire et maîtrisée, et un discours suffisamment *motivé* et *organisé.*

Exercice 3

*(Temps à consacrer à cet exercice : **40 minutes** environ)*

Soit A un anneau et $a \in A$. On dit que a est QI si a est nul ou inversible. On dit que a est LQI s'il existe $\alpha \in A$ tel que $a^2 \cdot \alpha = a$. On note A^{LQI} l'ensemble des éléments LQI de A.

On rappelle les définitions, notations et faits suivants (on ne demande pas de démontrer les faits en question)

- Soit A un anneau. On dit que A est un anneau local s'il possède un unique idéal maximal. Si A est local, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$, alors $A^\times = A \setminus \mathfrak{M}$.
- Soit A un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On note $A_\mathfrak{p}$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$ et $\iota_\mathfrak{p} \colon A \to A_\mathfrak{p}$ le morphisme de localisation. Alors $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local, d'idéal maximal engendré par $\iota_\mathfrak{p}(\mathfrak{p})$.
- Tout idéal propre d'un anneau est contenu dans un idéal premier de cet anneau.

1. Montrer que tout élément QI d'un anneau est nécessairement LQI.
2. Montrer que l'image d'un élément LQI par un morphisme d'anneaux est LQI.
3. Si A et B sont des anneaux, montrer l'égalité $(A \times B)^{LQI} = A^{LQI} \times B^{LQI}$
4. Que dire d'un anneau intègre dont tous les éléments sont LQI ?
5. Donner un exemple d'un anneau non intègre infini dont tous les éléments sont LQI.
6. Montrer que tout élément LQI d'un anneau local est nécessairement QI.
7. **(*)** Soit $a \in A$. On suppose que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\iota_\mathfrak{p}(a)$ est un élément inversible de $A_\mathfrak{p}$. Montrer que a est un élément LQI de A. *Indication* : on montrera que l'ensemble $\mathcal{I}_a := \{c \in A, ca \in a^2 A\}$ est un idéal de A et on pensera à mobiliser les faits rappelés en début d'énoncé.
8. **(*)** Dans l'énoncé précédent, que peut-on conclure sous l'hypothèse plus faible : pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\iota_\mathfrak{p}(a)$ est un élément QI de $A_\mathfrak{p}$? Et que dire de la réciproque ?
9. **(*)** Si vraiment il vous reste du temps et que ce que vous avez fait jusque là vous semble complet et soigneusement rédigé et argumenté, expliquez comment démontrer les faits admis en début d'énoncé.