

**Examen terminal
(première session)**

Mardi 20 avril 2021, 11h – 13h

La qualité et l'*originalité* de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part *cruciale* de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les affirmations doivent être soigneusement justifiées*. Les questions jugées plus délicates sont indiquées par (*).

On rappelle que le travail pour cette épreuve à distance doit se faire de façon individuelle et sans aide extérieure, et en particulier :

- sans communiquer avec qui que ce soit ;
- sans chercher aucune information sur internet ou dans toute autre documentation (y compris les documents spécifiques de cours et de TD d'ANAR) ;
- sans utiliser de calculatrice ou tout autre outil d'aide au calcul.

Exercice 9.1

Expression écrite libre (*Temps à consacrer à cet exercice : 40 minutes environ*)

J'aimerais que vous me racontiez un peu ce que vous avez retenu du contenu mathématique du cours d'ANAR.

- Aucune sorte d'exhaustivité n'est attendue : vous pouvez rédiger une réponse synthétique ou au contraire vous concentrer sur une ou plusieurs parties spécifiques du cours.
- Vous pouvez insister sur ce qui vous a plu et/ou marqué(e), voire sur ce qui ne vous a pas plu, voire même sur ce que vous n'avez pas compris, en essayant d'expliquer et d'illustrer pourquoi.
- Vous pouvez vous appuyer sur des résultats du cours (en tâchant d'expliquer pourquoi vous choisissez ces résultats) que vous pouvez entre autres illustrer d'exemples ou contre-exemples qui vous semblent significatifs (en tâchant d'expliquer pourquoi).
- Vous pouvez (ou non) vous appuyer sur des démonstrations, que vous pouvez par exemple tâcher de commenter.

Tout ce qui précède n'est qu'*indicatif* et *tout ce que vous avez à me restituer sur le contenu mathématique du cours sera favorablement accueilli* du moment que vous tâchez de l'exprimer avec soin. J'attends avant tout une expression mathématique claire et maîtrisée, et un discours suffisamment *motivé* et *organisé*. Notez enfin que *dans cet exercice, vous pouvez, de manière générale, vous affranchir de la consigne « toutes les affirmations doivent être soigneusement justifiées »*, mais que vous pouvez appuyer votre discours sur des arguments mathématiques précis ou sur des esquisses d'arguments.

Exercice 9.2

Corps finis (*Temps à consacrer à cet exercice : 40 minutes environ*)

Racontez moi ce que vous savez sur les corps de cardinal 16 (comment les construire, calculer dedans, si possible avec des exemples explicites, quels sont leurs sous-corps, leurs extensions, ou toute autre propriété qui vous semble pertinente). Si cela vous semble trop dur, faites l'exercice avec les corps de cardinal 8, voire 4 (et dans l'idéal, tâchez alors de m'expliquer pourquoi le cas de cardinal 16 vous semble trop dur). *Contrairement à l'exercice précédent, des justifications soigneuses sont attendues tout au long de votre exposé*. Mais comme pour l'exercice précédent, j'attends avant tout une expression mathématique claire et maîtrisée, et un discours suffisamment *motivé* et *organisé*.

Solution : On pourra notamment se reporter au corrigé du CC2 d'ANAR de 2020 pour quelques informations significatives sur la construction et la manipulation d'un corps de cardinal 16

Exercice 9.3

(Temps à consacrer à cet exercice : 40 minutes environ)

Soit A un anneau et $a \in A$. On dit que a est QI si a est nul ou inversible. On dit que a est LQI s'il existe $\alpha \in A$ tel que $a^2 \cdot \alpha = a$. On note A^{LQI} l'ensemble des éléments LQI de A .

On rappelle les définitions, notations et faits suivants (on ne demande pas de démontrer les faits en question)

- Soit A un anneau. On dit que A est un anneau local s'il possède un unique idéal maximal. Si A est local, d'idéal maximal \mathfrak{M} , alors $A^\times = A \setminus \mathfrak{M}$.
- Soit A un anneau et \mathfrak{p} un idéal premier de A . On note $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$ et $\iota_{\mathfrak{p}}: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ le morphisme de localisation. Alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local, d'idéal maximal engendré par $\iota_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$.
- Tout idéal propre d'un anneau est contenu dans un idéal premier de cet anneau.

1. Montrer que tout élément QI d'un anneau est nécessairement LQI.

Solution : Soit A un anneau et $a \in A$ supposé QI. Si a est nul, on a $a^2 \cdot 0_A = 0_A = a$ donc a est LQI. Si a est inversible, en notant α l'inverse de a , on a $a^2 \cdot \alpha = a \cdot (a \cdot \alpha) = a \cdot 1_A = a$ donc a est LQI.

2. Montrer que l'image d'un élément LQI par un morphisme d'anneaux est LQI.

Solution : Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et $a \in A$ un élément LQI. Soit $\alpha \in A$ tel que $a^2 \cdot \alpha = a$. On a $\varphi(a^2 \cdot \alpha) = \varphi(a)$ soit comme φ est un morphisme d'anneaux $\varphi(a)^2 \cdot \varphi(\alpha) = \varphi(a)$. Par définition, ceci montre que $\varphi(a)$ est LQI.

3. Si A et B sont des anneaux, montrer l'égalité $(A \times B)^{LQI} = A^{LQI} \times B^{LQI}$

Solution : Il est tout à fait envisageable ici de raisonner par équivalences à condition d'être soigneux, mais procédons par double inclusion.

Montrons l'inclusion

$$(A \times B)^{LQI} \subset A^{LQI} \times B^{LQI}.$$

Soit $(a, b) \in (A \times B)^{LQI}$. Soit $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tel que $(a, b)^2 \cdot (\alpha, \beta) = (a, b)$. Par définition de la structure d'anneau produit, ceci se réécrit $(a^2 \cdot \alpha, b^2 \cdot \beta) = (a, b)$ ce qui entraîne $a^2 \cdot \alpha = a$ et $b^2 \cdot \beta = b$. Ainsi $a \in A^{LQI}$ et $b \in B^{LQI}$ ce qui montre l'inclusion annoncée.

Montrons à présent l'inclusion

$$A^{LQI} \times B^{LQI} \subset (A \times B)^{LQI}.$$

Soit $(a, b) \in A^{LQI} \times B^{LQI}$, en d'autres termes soit $a \in A^{LQI}$ et $b \in B^{LQI}$. Soit $\alpha \in A$ tel que $a^2 \cdot \alpha = a$ et $\beta \in B$ tel que $b^2 \cdot \beta = b$. On a donc $(a^2 \cdot \alpha, b^2 \cdot \beta) = (a, b)$. Par définition de la structure d'anneau produit, ceci se réécrit $(a, b)^2 \cdot (\alpha, \beta) = (a, b)$. Ainsi on a bien $(a, b) \in (A \times B)^{LQI}$ ce qui montre l'inclusion annoncée, et donc l'égalité demandée par double inclusion.

4. Que dire d'un anneau intègre dont tous les éléments sont LQI?

Solution : Soit A un anneau intègre dont tous les éléments sont LQI. Montrons que A est un corps. Comme A est intègre donc non nul, il s'agit de montrer que tout élément non nul de A est inversible. Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$. Par hypothèse, a est LQI. Soit $\alpha \in A$ tel

que $a^2 \cdot \alpha = a$. Ceci se réécrit $a \cdot (1_A - a\alpha) = 0_A$. Comme A est intègre et a est non nul, on en déduit qu'on a $1_A - a\alpha = 0_A$, ce qui montre que a est inversible, et permet de conclure.

5. Donner un exemple d'un anneau non intègre infini dont tous les éléments sont LQI.

Solution : Soit \mathbf{K} un corps. Par définition d'un corps et de QI, tout élément de \mathbf{K} est QI. D'après la question 1, tout élément de \mathbf{K} est donc LQI. D'après la question 3, on a donc $(\mathbf{K} \times \mathbf{K})^{LQI} = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$. Par ailleurs $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$ n'est pas intègre : en effet, comme \mathbf{K} est un corps, on a $0_{\mathbf{K}} \neq 1_{\mathbf{K}}$ et par ailleurs on a l'égalité

$$(0_{\mathbf{K}}, 1_{\mathbf{K}}) \times (1_{\mathbf{K}}, 0_{\mathbf{K}}) = (0_{\mathbf{K}}, 0_{\mathbf{K}}) = 0_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}}.$$

Ainsi, par exemple, $A := \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ est un anneau non intègre infini tel que $A^{LQI} = A$.

6. Montrer que tout élément LQI d'un anneau local est nécessairement QI.

Solution : Soit A un anneau local, d'idéal maximal \mathfrak{M} et soit $a \in A^{LQI}$. Il s'agit de montrer que a est nul ou inversible. Comme $A \setminus \mathfrak{M} = A^\times$, il suffit de montrer que si $a \in \mathfrak{M}$, a est nul. Supposons donc $a \in \mathfrak{M}$ et soit $\alpha \in A$ tel que $a^2 \cdot \alpha = a$. On a donc $a \cdot (1_A - a\alpha) = 0_A$. Comme $\alpha \in \mathfrak{M}$, on a $a\alpha \in \mathfrak{M}$. Ainsi $1_A - a\alpha$ n'est pas un élément de \mathfrak{M} , car si c'était le cas, comme $1_A = (1_A - a\alpha) + a\alpha$, on aurait $1_A \in \mathfrak{M}$ ce qui contredirait le fait que \mathfrak{M} est maximal (donc propre). Comme $1_A - a\alpha$ n'est pas un élément de \mathfrak{M} , c'est un élément de A^\times . Donc la relation $a \cdot (1_A - a\alpha) = 0_A$ entraîne $a = 0_A$, ce qu'il fallait démontrer.

7. (*) Soit $a \in A$. On suppose que pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est un élément inversible de $A_{\mathfrak{p}}$. Montrer que a est un élément LQI de A . *Indication :* on montrera que l'ensemble $\mathcal{I}_a := \{c \in A, ca \in a^2A\}$ est un idéal de A et on pensera à mobiliser les faits rappelés en début d'énoncé.

Solution : On a $0_A \cdot a = a^2 \cdot 0_A$ donc $0_A \in \mathcal{I}_a$. Soit $c_1, c_2 \in \mathcal{I}_a$ et $b_1, b_2 \in A$ tels que $c_1 a = a^2 \cdot b_1$ et $c_2 \cdot a = a^2 \cdot b_2$. Alors $(c_1 - c_2) \cdot a = a^2 \cdot (b_1 - b_2)$. Donc $c_1 - c_2 \in \mathcal{I}_a$. Par ailleurs, soit $d \in A$. Alors $(dc_1) \cdot a = a^2 \cdot (db_1)$ et donc $dc_1 \in \mathcal{I}_a$. Donc \mathcal{I}_a est un idéal de A . Comme $a \cdot a = a^2 \cdot 1_A$, \mathcal{I}_a contient a . Supposons que \mathcal{I}_a est un idéal propre de A . Alors il existe un idéal premier \mathfrak{p} de A contenant \mathcal{I}_a . En particulier $a \in \mathfrak{p}$. Ainsi $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est dans l'idéal maximal de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ et ne peut donc être inversible : contradiction. Donc \mathcal{I}_a n'est pas propre, en particulier $1_A \in \mathcal{I}_a$. Donc $a \in a^2 \cdot A$, ce qui montre bien que a est LQI.

8. (*) Dans l'énoncé précédent, que peut-on conclure sous l'hypothèse plus faible : pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est un élément QI de $A_{\mathfrak{p}}$?

Solution : On peut encore conclure que a est LQI. On reprend le raisonnement précédent. Si l'idéal \mathfrak{p} contenant \mathcal{I}_a est tel que $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est inversible, on peut conclure exactement de la même façon.

Supposons à présent que $\iota_{\mathfrak{p}}(a) = 0$. Par un résultat du cours sur la localisation, il existe alors un élément $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $s \cdot a = 0$. Mais cette dernière égalité entraîne que $s \in \mathcal{I}_a$, ce qui contredit l'inclusion $\mathcal{I}_a \subset \mathfrak{p}$. Donc le cas $\iota_{\mathfrak{p}}(a) = 0$ ne peut pas se produire, et on peut donc conclure comme précédemment.

Et que dire de la réciproque ?

Solution : La réciproque est vraie, sous la forme : si a est un élément LQI de A , alors pour tout idéal \mathfrak{p} de A , $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est un élément QI de $A_{\mathfrak{p}}$. Remarque : QI était une abréviation de "quasi-inversible" et LQI une abréviation de "localement quasi-inversible" ; le résultat de cette question justifie en un sens cette dernière terminologie. Attention, même si a est un élément LQI non nul de A , il n'est pas vrai en général que pour tout idéal \mathfrak{p} de A , $\iota_{\mathfrak{p}}(a)$ est

inversible.

C'est vrai si A est intègre, car les morphismes $\iota_{\mathfrak{p}}$ sont tous injectifs ; notons cependant que si A est intègre, un élément LQI non nul est nécessairement inversible (cf. le raisonnement de la question 4)

Mais par exemple si \mathbf{K} est un corps et $A = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, tout élément de A est LQI, mais tout élément de l'idéal premier $\mathfrak{p} = \{0\} \times \mathbf{K}$ s'envoie sur 0 dans le localisé $A_{\mathfrak{p}}$; ici le morphisme de localisation \mathfrak{p} est le morphisme $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ qui envoie (x, y) sur x .

9. (*) Si vraiment il vous reste du temps et que ce que vous avez fait jusque là vous semble complet et soigneusement rédigé et argumenté, expliquez comment démontrer les faits admis en début d'énoncé.