

## 5 Localisation (construire des anneaux à partir d'autres anneaux, partie 3). Corps des fractions d'un anneau intègre.

La localisation est un procédé algébrique très général qui consiste en deux mots à « forcer » certains éléments d'un anneau à devenir inversibles, de façon notamment à obtenir un « calcul des fractions généralisé » aux propriétés similaires à celles du calcul des fractions classique que l'on connaît depuis notre plus tendre enfance. Le cas particulier le plus connu de ce procédé est la construction de  $\mathbf{Q}$  à partir de  $\mathbf{Z}$ , qui se généralise en la notion de corps des fractions d'un anneau intègre : dans ce cas, on force en un sens tous les éléments non nuls à devenir inversibles. Mais la localisation est un procédé bien plus général que la construction du corps des fractions d'un anneau intègre, et cette généralité, loin d'être gratuite, rend des services considérables notamment en algèbre commutative et en géométrie algébrique. Au niveau de ce cours, on se contentera de développer les définitions et propriétés les plus élémentaires en lien avec la localisation, en donnant quelques exemples et en insistant sur le cas particulier du corps des fractions d'un anneau intègre. Quelques autres propriétés seront vues en exercices de TD.

### 5.1 Un exemple

Commençons par un exemple (qui peut être sauté en première lecture) destiné à éclaircir la dénomination même du procédé de localisation, laquelle est d'inspiration géométrique, voire topologique.

Soit  $x_0 \in \mathbf{R}$  et mettons que l'on souhaite étudier uniquement des propriétés de nature locale des fonctions continues au voisinage de  $x_0$ , par exemple décider si une telle fonction est dérivable en  $x_0$ . L'ensemble des fonctions continues au voisinage de  $x_0$  est-il un objet d'étude naturel pour ce type de propriétés ? Pas vraiment, et au moins pour deux raisons. Tout d'abord, cet ensemble n'a pas de structure algébrique naturelle (on ne peut pas a priori ajouter ou multiplier deux fonctions continues au voisinage de  $x_0$  car elles ne sont pas nécessairement définies sur le même ensemble) ce qui ne le rend pas très pratique à manipuler. Ensuite les objets de cet ensemble restent en un sens de nature trop globale. Ainsi si  $I$  est un intervalle ouvert contenant  $x_0$  (aussi « petit » soit-il) et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction continue,  $f$  contient encore une « énorme » quantité d'informations dont on n'a que faire si on s'intéresse uniquement aux propriétés de nature locale en  $x_0$ . Plus précisément, ce que fait  $f$  sur le complémentaire de n'importe quel intervalle ouvert  $K$ , aussi « petit » soit-il, contenant  $x_0$  et contenu dans  $I$ , ne nous intéresse absolument pas.

On peut cependant retrouver à la fois une structure algébrique et une localité « authentique » via la construction suivante : on considère l'ensemble des couples  $(I, f)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert contenant  $x_0$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction continue, sur lequel on définit une relation d'équivalence  $\sim$  en décrétant que  $(I, f) \sim (J, g)$  si et seulement s'il existe un intervalle ouvert  $K \subset I \cap J$  contenant  $x_0$  et tel que  $f|_K = g|_K$ . On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence. On note  $\overline{(I, f)}$  la classe de  $(I, f)$  dans l'ensemble quotient. Sur

l'ensemble quotient, on définit une addition et une multiplication ainsi : pour tout intervalle ouvert  $I$  (resp.  $J$ ) contenant  $x_0$  et toute fonction  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  (resp.  $g: J \rightarrow \mathbf{R}$ ), on pose

$$\overline{(I, f)} + \overline{(J, g)} = \overline{(I \cap J, f|_{I \cap J} + g|_{I \cap J})}$$

et

$$\overline{(I, f)} \times \overline{(J, g)} = \overline{(I \cap J, f|_{I \cap J} \times g|_{I \cap J})}.$$

On vérifie que ces opérations sont bien définies et munissent l'ensemble quotient d'une structure d'anneau (en fait de  $\mathbf{R}$ -algèbre). Cet anneau, noté  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$  (attention, ce n'est pas une notation standard), est appelé l'anneau des germes de fonctions continues en  $x_0$ .

Pour tout intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$  contenant  $x_0$ , l'application

$$\varphi_I: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(x_0, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & \overline{(I, f)} \end{array}$$

qui à une fonction  $f$  associe son « germe » en  $x_0$  est un morphisme d'anneaux. On a par ailleurs la propriété remarquable suivante : tout élément  $f$  de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  tel que  $f(x_0) \neq 0$  s'envoie par  $\varphi_I$  sur un élément inversible de  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$ . En effet, si  $f(x_0) \neq 0$ , on peut trouver  $J \subset I$  un intervalle ouvert contenant  $x_0$  et tel que  $g := f|_J$  ne s'annule pas. Alors  $\overline{(I, f)} = \overline{(J, g)}$ ; or  $\overline{(J, g)}$  est clairement inversible, d'inverse  $\overline{(J, \frac{1}{g})}$ .

Ceci montre que dans cet anneau « local » des germes  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$  certains éléments d'anneaux plus « globaux » vont devenir inversibles. En fait, en un sens qui sera rendu précis dans ce qui suit, construire  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$ , ce qui du point de vue topologique revient à « localiser » les fonctions continues au voisinage de  $x_0$ , revient exactement, du point de vue algébrique, à « forcer » toutes les fonctions de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  qui ne s'annulent pas en  $x_0$  à devenir inversibles. Ceci est à l'origine du nom de *localisation* attribué au procédé purement algébrique décrit plus en détails ci-dessous et consistant à « forcer » certains éléments d'un anneau à devenir inversibles.

## 5.2 Définition et propriétés élémentaires du localisé

**Définition 1.** Soit  $A$  un anneau. Une partie  $S$  de  $A$  est dite *multiplicative* si  $1_A \in S$  et si pour tous  $s, s' \in S$  alors le produit  $ss'$  est encore dans  $S$ .

*Exemples.* Les exemples qui suivent ne sont pas seulement illustratifs; ils sont d'une importance fondamentale dans la pratique.

Si  $a \in A$ ,  $S := \{a^n\}_{n \in \mathbf{N}}$  est une partie multiplicative de  $A$ .

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ ,  $A \setminus \mathfrak{p}$  est une partie multiplicative de  $A$ . En particulier si  $A$  est intègre,  $A \setminus \{0\}$  est une partie multiplicative de  $A$ .

L'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont *pas* des diviseurs de zéros est une partie multiplicative de  $A$ . En particulier, si  $A$  est intègre, on retrouve que  $A \setminus \{0\}$  est une partie multiplicative de  $A$ .

*Remarque.* Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux. Soit  $S$  une partie multiplicative de  $A$  et  $T$  une partie multiplicative de  $B$ .

Alors  $\varphi(S) = \{\varphi(s), s \in S\}$  est une partie multiplicative de  $B$  et  $\varphi^{-1}(T) = \{a \in A, \varphi(a) \in T\}$  est une partie multiplicative de  $A$ .

*Remarque.* Si  $S$  est une partie multiplicative de  $A$ , l'ensemble

$$\mathcal{I}_S = \{a \in A, \exists s \in S, as = 0\}$$

est un idéal de  $A$ .

Localiser  $A$  par rapport à une partie multiplicative  $S$ , c'est construire un nouvel anneau où tous les éléments de  $S$  deviennent inversibles, de sorte que cet anneau soit « le plus petit possible » en un sens pour cette propriété. Dans de nombreux cas d'applications, ce nouvel anneau contiendra  $A$  comme sous-anneau, mais ça n'est pas non plus systématique, et de manière générale cela vaudra si et seulement si l'idéal  $\mathcal{I}_S$  ci-dessus est nul.

Noter aussi qu'on ne demande pas a priori qu'une partie multiplicative  $S$  de  $A$  ne contienne pas  $0_A$ . Cependant, dans ce cas, le localisé sera l'anneau nul (ce qui se comprend bien intuitivement : l'anneau nul est le seul anneau  $A$  où  $0_A$  est inversible).

**Théorème 2.** *Soit  $A$  un anneau et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ .*

1. *Il existe un anneau  $B$  et un morphisme d'anneaux  $\varphi: A \rightarrow B$  vérifiant les propriétés suivantes :*
  - *on a  $\varphi(S) \subset B^\times$  ;*
  - *soit  $C$  un anneau et  $\psi: A \rightarrow C$  un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(S) \subset C^\times$  ; alors il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: B \rightarrow C$  tel que  $\psi = \theta\varphi$ .*
2. *Un tel couple  $(B, \varphi)$  est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire : soit  $B'$  un anneau et  $\varphi': A \rightarrow B'$  un morphisme d'anneaux vérifiant les propriétés suivantes :*
  - *on a  $\varphi'(S) \subset (B')^\times$  ;*
  - *soit  $C$  un anneau et  $\psi: A \rightarrow C$  un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(S) \subset C^\times$  ; alors il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: B' \rightarrow C$  tel que  $\psi = \theta\varphi'$ .**Alors il existe un unique isomorphisme d'anneaux  $\gamma: B \rightarrow B'$  tel que  $\gamma\varphi = \varphi'$ .*

*Remarque.* Si  $(B, \varphi)$  est un couple vérifiant les propriétés de l'énoncé, on remarque aussitôt que l'idéal  $\mathcal{I}_S$  décrit dans la remarque ci-dessus est inclus dans le noyau de  $\varphi$ . En effet, si  $a \in A$  et  $s \in S$  vérifient  $as = 0$ , alors  $\varphi(a)\varphi(s) = 0$ , mais comme  $\varphi(s)$  est inversible on en déduit  $\varphi(a) = 0$ . Plus généralement cet argument montre que si  $C$  un anneau et  $\psi: A \rightarrow C$  est un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(S) \subset C^\times$ , alors  $\mathcal{I}_S$  est contenu dans  $\text{Ker}(\psi)$ .

Notons alors  $\tilde{A}$  l'anneau quotient  $A/\mathcal{I}_S$  et  $\pi: A \rightarrow \tilde{A}$  le morphisme quotient. La propriété universelle de l'anneau quotient montre alors que pour montrer l'existence de  $(B, \varphi)$  avec

les propriétés voulues il suffit de le faire pour  $\tilde{A}$ , en prenant pour partie multiplicative  $\pi(S)$  (cf. la première remarque après la définition 1). Alors  $(B, \varphi \circ \pi)$  sera un couple convenable pour  $A$ . En d'autres termes, on peut supposer pour montrer l'existence de  $(B, \varphi)$  que  $S$  vérifie la propriété : pour tout  $a \in A$  et tout  $s \in S$ , si  $sa = 0$  alors  $a = 0$ . *NB : nous ne nous servons pas de cette remarque dans la démonstration du théorème 2*

Si  $(B, \varphi)$  est un couple vérifiant les propriétés de l'énoncé,  $B$  est appelé *le localisé de  $A$  par rapport à  $S$*  et sera noté  $S^{-1}A$ ;  $\varphi$  est appelé *le morphisme de localisation*. Les articles définis sont justifiés par le résultat d'unicité à isomorphisme unique près. Il est à noter qu'on aurait pu énoncer le théorème sous une forme équivalente en utilisant le langage des  $A$ -algèbres (rappelons que la donnée d'un anneau  $B$  et d'un morphisme d'anneaux  $\varphi: A \rightarrow B$  correspond exactement à la donnée d'une  $A$ -algèbre). En particulier  $S^{-1}A$  est naturellement muni d'une structure de  $A$ -algèbre.

On peut alors reformuler une partie du théorème 2 de la façon suivante.

**Théorème 3. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE L'ANNEAU LOCALISÉ**

*Soit  $A$  un anneau,  $S$  une partie multiplicative de  $A$  et  $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme de localisation.*

*Soit  $C$  un anneau et  $\psi: A \rightarrow C$  un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(S) \subset C^\times$ ; alors il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: S^{-1}A \rightarrow C$  tel que  $\psi = \theta\varphi$ .*

**Slogan.** Se donner un morphisme du localisé  $S^{-1}A$  vers un anneau  $C$ , c'est se donner un morphisme de  $A$  vers  $C$  tel que l'image de tout élément de  $S$  est inversible dans  $C$ .

*Démonstration.* (du théorème 2). On commence par motiver la construction qui sera décrite.

L'idée intuitive est de construire  $B$  comme l'ensemble des « fractions symboliques »  $\frac{a}{s}$  avec  $a \in A$  et  $s \in S$ , de sorte que le morphisme de localisation sera donné par  $a \mapsto \frac{a}{1}$ . Basiquement, il faut bien comprendre ici la notion de fraction au sens « naturel », avec les règles de calcul associées. En particulier, si  $a, a' \in A$  et  $s, s' \in S$ , on veut avoir  $\frac{s}{s} = 1$ ,  $\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$  (en particulier  $\frac{as'}{ss'} = \frac{a}{s}$ ) et  $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$ . Cependant, en raison de la possible présence dans  $S$  de diviseurs de zéro, il faut faire un peu attention avec la règle du produit en croix : la condition  $as' - a's = 0$  ne sera en général qu'une condition *suffisante* pour l'égalité  $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ .

En effet, supposons que  $a \in A$  soit non nul et que  $s \in S$  vérifie  $sa = 0$ . Comme on l'a déjà remarqué, l'image de  $a$  dans le localisé, c'est-à-dire  $\frac{a}{1}$  est alors nécessairement nulle, c'est-à-dire égale à  $\frac{0}{1}$ . Mais on n'a pas  $a \times 1 = 0 \times 1$ . Plus généralement si  $a, a' \in A$  et  $s, s', t \in S$  sont tels que  $t(as' - a's) = 0$  alors on doit avoir  $\frac{as'}{1} - \frac{a's}{1} = 0$  soit, en multipliant par  $\frac{1}{ss'}$ ,  $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ , et ceci que le produit en croix  $as' - a's$  soit nul ou non.

*Passons à la démonstration proprement dite.* On la donne modulo quelques vérifications techniques *a priori* sans difficulté majeure (« Il suffit d'écrire. . . »). N'hésitez pas à en référer à l'enseignant en cas de problème.

On démontre d'abord l'unicité à isomorphisme unique près. Soit  $(B, \varphi)$  et  $(B', \varphi')$  deux couples vérifiant les propriétés voulues. Appliquons la propriété de  $(B, \varphi)$  avec  $C = B$  et  $\psi = \varphi$ . On en déduit qu'il existe un unique morphisme  $\iota: B \rightarrow B$  tel que  $\iota\varphi = \varphi$ ; en particulier si  $\iota: B \rightarrow B$  est tel que  $\iota\varphi = \varphi$ , alors  $\iota = \text{Id}_B$ . Une propriété similaire vaut pour  $(B', \varphi')$ .

Appliquons ensuite la propriété de  $(B, \varphi)$  avec  $C = B'$  et  $\psi = \varphi'$ . On en déduit qu'il existe un unique morphisme  $\theta: B \rightarrow B'$  tel que  $\theta\varphi = \varphi'$ . Il reste à montrer que  $\theta$  est un isomorphisme. En échangeant le rôle de  $B$  et  $B'$ , on voit aussi qu'il existe un unique morphisme  $\theta': B' \rightarrow B$  tel que  $\theta'\varphi' = \varphi$ . Alors  $\theta'\theta\varphi = \theta'\varphi' = \varphi$ . D'après ce qui précède, on a nécessairement  $\theta'\theta = \text{Id}_B$ . En échangeant le rôle de  $B$  et  $B'$ , on obtient  $\theta\theta' = \text{Id}_{B'}$ . Donc  $\theta$  est bien un isomorphisme.

Montrons à présent l'existence d'un tel couple  $(B, \varphi)$ . On munit l'ensemble  $A \times S$  de la relation d'équivalence définie par :

$$\forall (a, s) \in A \times S, \quad \forall (a', s') \in A \times S, \quad (a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S, t(as' - a's) = 0.$$

On vérifie que ceci définit bien une relation d'équivalence sur  $A \times S$ . On note  $B$  l'ensemble quotient. La classe de  $(a, s) \in A \times S$  dans  $B$  est *notée*  $\frac{a}{s}$  (*cf.* notamment la remarque ci-dessous pour la dangerosité de cette notation)

On munit  $B$  de deux lois de composition internes  $+$  et  $\times$  définies par

$$\forall (a, s) \in A \times S, \quad \forall (a', s') \in A \times S, \quad \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$$

et

$$\forall (a, s) \in A \times S, \quad \forall (a', s') \in A \times S, \quad \frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

Est-il nécessaire d'insister sur le fait que ces « définitions » ne le deviendront que lorsqu'on aura vérifié que les formules ci-dessous ne dépendent pas du choix des représentants des classes d'équivalence considérées ?

On vérifie alors, un peu fastidieusement mais *a priori* sans grande difficulté, que  $B$  munie de ces deux lois est bien un anneau, l'élément neutre pour l'addition étant  $\frac{0_A}{1_A}$  et l'élément neutre pour la multiplication étant  $\frac{1_A}{1_A}$ . On vérifie aussi que les règles de calculs des fractions rappelées ci-dessus s'appliquent bien dans  $B$ . On vérifie par ailleurs que l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1_A} \end{array}$$

est bien un morphisme d'anneaux. Si  $s \in S$ , la relation

$$\frac{s}{1_A} \times \frac{1_A}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1_A}{1_A}$$

montre que  $\varphi(s) \in B^\times$ . On a donc bien  $\varphi(S) \subset B^\times$

Soit à présent  $\psi: A \rightarrow C$  un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(S) \subset C^\times$ . Montrons qu'il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: B \rightarrow C$  tel que  $\theta\varphi = \psi$

Nécessairement, pour tout  $a \in A$ , on doit donc avoir  $\theta(\frac{a}{1_A}) = \psi(a)$ . Par ailleurs, si  $s \in S$ ,  $\frac{1_A}{s}$  est l'inverse de  $\frac{s}{1_A}$  dans  $B$ . Comme  $\theta(\frac{s}{1_A})$  doit être égal à  $\psi(s)$ ,  $\theta(\frac{1_A}{s})$  doit être égal à  $\psi(s)^{-1}$  (rappelons que par hypothèse  $\psi(S) \subset C^\times$ . Ainsi pour tout  $(a, s) \in A \times S$ , on doit avoir

$$\theta\left(\frac{a}{s}\right) = \theta\left(\frac{a}{1_A} \times \frac{1_A}{s}\right) = \theta\left(\frac{a}{1_A}\right) \times \theta\left(\frac{1_A}{s}\right) = \psi(a)\psi(s)^{-1}$$

Ceci montre l'unicité de  $\theta$ .

Il reste à vérifier que l'application  $\frac{a}{s} \mapsto \psi(a)\psi(s)^{-1}$  est bien définie et est un morphisme d'anneaux.  $\square$

*Exemple.* On revient sur l'exemple introductif. Soit  $x_0 \in \mathbf{R}$  et  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  contenant  $x_0$ . Soit

$$\mathcal{I}_{x_0} := \{x_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R}), \quad f(x_0) = 0\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_{x_0}$  est un idéal maximal de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ . Soit  $S = \mathcal{C}(I, \mathbf{R}) \setminus \mathcal{I}_{x_0}$ . Alors  $S^{-1}\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  est isomorphe à l'anneau  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$  des germes de fonctions continues en  $x_0$ , et le morphisme de localisation est  $f \mapsto \overline{(I, f)}$  (cf. exercice 4.2)

**Théorème 4.** Soit  $A$  un anneau et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . Soit  $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme de localisation. Pour mémoire, soit  $\mathcal{I}_S = \{a \in A, \exists s \in S, sa = 0\}$ . (cf. la remarque avant l'énoncé du théorème 2.

Alors  $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{I}_S$ .

En particulier

1. si  $A$  est intègre et  $S$  ne contient pas  $0_A$ , le morphisme de localisation est injectif;
2.  $S^{-1}A$  est l'anneau nul si et seulement si  $S$  contient  $0_A$ .

*Démonstration.* Exercice 4.6  $\square$

*Exemple.* Soit  $A$  et  $B$  des anneaux. Alors  $S := A^\times \times \{0_B, 1_B\}$  est une partie multiplicative de  $A \times B$  et on a  $\mathcal{I}_S = \{0\} \times B$ . Le morphisme de localisation est le morphisme de projection  $A \times B \rightarrow A$ . En fait, on peut dans ce qui précède remplacer  $\{0_B, 1_B\}$  par n'importe quelle partie multiplicative de  $B$  qui contient  $0_B$  (cf. exercice 4.6).

*Remarque.* Si  $a \in A$ , on a souvent tendance (bien naturellement...) à noter  $\frac{a}{1_A} = a$  l'image de  $a$  dans  $S^{-1}A$ . Il faut bien réaliser qu'une telle notation est dangereuse dès que le morphisme de localisation n'est pas injectif. En particulier  $a$ , en tant qu'élément du localisé, peut être nul sans que  $a$ , en tant qu'élément de  $A$ , soit nécessairement nul.

Par contre, si le morphisme de localisation est injectif (par exemple si  $A$  est intègre et  $S$  ne contient pas  $0_A$ ),  $A$  s'identifie à un sous-anneau de  $S^{-1}A$ , et la notation ci-dessus se justifie pleinement.

Dans le cas d'un anneau intègre dont on connaît un surcorps, on a une construction plus directe du localisé.

**Théorème 5.** *Soit  $A$  un anneau intègre et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  ne contenant pas  $0_A$ . Soit  $\mathbf{K}$  un corps contenant  $A$  comme sous-anneau. Soit*

$$B = \left\{ \frac{a}{s} \right\}_{(a,s) \in A \times S} \subset \mathbf{K}.$$

*Alors  $B$  est un sous-anneau de  $\mathbf{K}$  contenant  $A$ . En outre  $B = S^{-1}A$  et le morphisme de localisation est le morphisme déduit de l'inclusion de  $A$  dans  $B$ .*

*Démonstration.* Exercice 4.5. □

*Exemple.* Soit  $p$  un nombre premier et

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Q}.$$

Alors  $\mathbf{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbf{Z}$ , où  $S$  est la partie multiplicative  $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$ .

*Exemple.* Soit  $x$  un entier non nul et

$$\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{x} \right] := \left\{ \frac{a}{x^n} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{Q}.$$

Alors  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{x} \right] = S^{-1}\mathbf{Z}$ , où  $S$  est la partie multiplicative  $\{x^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ .

### 5.3 Le corps des fractions d'un anneau intègre

**Théorème 6.** *Soit  $A$  un anneau intègre et  $S = A \setminus \{0\}$ . Alors le localisé  $S^{-1}A$  est un corps. On l'appelle le corps des fractions de l'anneau intègre  $A$ , et on le note  $\text{Frac}(A)$ .*

*Exemple.* Soit  $p$  un nombre premier et  $x$  un entier non nul. On a

$$\text{Frac}(\mathbf{Z}) = \text{Frac}(\mathbf{Z}_{(p)}) = \text{Frac} \left( \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{x} \right] \right) = \mathbf{Q}.$$

*Exemple.* On a

$$\text{Frac}(\mathbf{Z}[i]) = \mathbf{Q}[i] = \{a + bi\}_{(a,b) \in \mathbf{Q}}.$$

*Exemple.* Si  $\mathbf{K}$  est un corps, le corps des fractions de  $\mathbf{K}[X]$  s'appelle le *corps des fractions rationnelles en une indéterminée à coefficients dans  $\mathbf{K}$*  et est noté  $\mathbf{K}(X)$ .

Le corps des fractions de  $\mathbf{K}[[X]]$  s'appelle le *corps des séries de Laurent à coefficient dans  $\mathbf{K}$*  et est noté  $\mathbf{K}((X))$ .

Les corps des fractions d'anneaux intègres sont des exemples particuliers de localisés et à ce titre vérifient la propriété universelle du localisé. Cependant, dans le cas des corps des fractions, cette propriété universelle peut se reformuler de la manière légèrement différente suivante.

**Théorème 7. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DU CORPS DES FRACTIONS** *Soit  $A$  un anneau intègre.*

1. *Soit  $\mathbf{L}$  un corps et  $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$  un morphisme d'anneaux injectif. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: \text{Frac}(A) \rightarrow \mathbf{L}$  tel que  $\psi = \theta\varphi$*
2. *Soit  $\mathbf{K}$  un corps et  $\varphi: A \rightarrow \mathbf{K}$  un morphisme d'anneaux injectif. On suppose que le couple  $(\mathbf{K}, \varphi)$  vérifie la propriété suivante : pour tout corps  $\mathbf{L}$  et tout morphisme d'anneaux injectif  $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$ , il existe un unique morphisme de corps  $\theta: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$  tel que  $\psi = \theta\varphi$ .*

*Alors  $\mathbf{K}$  est le corps des fractions de  $A$  et  $\varphi$  est le morphisme de localisation, en d'autres termes  $\varphi$  est le morphisme déduit de l'inclusion naturelle de  $A$  dans  $\text{Frac}(A)$ .*

De manière un peu plus informelle, ce théorème dit que le corps des fractions d'un anneau intègre  $A$  est caractérisé de la manière suivante : c'est un corps  $\mathbf{K}$  qui contient  $A$  et tel que tout corps  $\mathbf{L}$  qui contient  $A$  contient aussi  $\mathbf{K}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{L}$  un corps et  $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$  un morphisme d'anneaux injectif. En particulier,  $\psi(A \setminus \{0\}) \subset \mathbf{L} \setminus \{0\} = \mathbf{L}^\times$ . D'après la propriété universelle du localisé, il existe un unique morphisme d'anneaux  $\theta: \text{Frac}(A) \rightarrow \mathbf{L}$  tel que  $\psi = \theta\varphi$ .

Supposons à présent que le couple  $(\mathbf{K}, \varphi)$  vérifie les propriétés de la seconde partie de l'énoncé. Montrons que  $(\mathbf{K}, \varphi)$  vérifie la propriété universelle du localisé. Soit  $\psi: A \rightarrow C$  un morphisme d'anneaux tel que  $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C^\times$ . Si  $C$  est l'anneau nul, il existe bien un unique morphisme  $\theta: \mathbf{K} \rightarrow C$  tel que  $\theta\varphi = \psi$  : c'est l'unique morphisme de  $\mathbf{K}$  vers l'anneau nul.

Supposons à présent que  $C$  n'est pas l'anneau nul. Comme on a  $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C^\times$ , on a en particulier  $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C \setminus \{0\}$ , donc  $\psi$  est injectif. Soit  $B := \psi(A)$ . C'est un

sous-anneau de  $C$ . Comme  $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C^\times$ , tout élément non nul de  $B$  est un élément de  $C^\times$ . Cette dernière remarque permet de définir le sous-ensemble de  $C$  suivant :

$$\tilde{B} := \left\{ \frac{b_1}{b_2} \right\}_{(b_1, b_2) \in B \times (B \setminus \{0\})}.$$

On vérifie que  $\tilde{B}$  est un sous-anneau de  $C$  qui contient  $B$ , et que  $\tilde{B}$  est un corps.

On note  $\iota: \tilde{B} \rightarrow C$  le morphisme déduit de l'inclusion de  $\tilde{B}$  dans  $C$ , et  $\tilde{\psi}: A \rightarrow \tilde{B}$  le morphisme déduit de  $\psi$  et de l'inclusion de  $B = \psi(A)$  dans  $\tilde{B}$ . Par hypothèse, il existe un unique morphisme  $\tilde{\theta}: \mathbf{K} \rightarrow \tilde{B}$  tel que  $\tilde{\theta}\varphi = \tilde{\psi}$ . En composant la relation précédente par  $\iota$  et en posant  $\theta := \iota\tilde{\theta}$ , on obtient  $\theta\varphi = \psi$ .

Il reste à montrer l'unicité d'un tel morphisme  $\theta$ .

Soit  $\theta': \mathbf{K} \rightarrow C$  un morphisme tel que  $\theta'\varphi = \psi$ . Alors  $\theta'(\mathbf{K})$  est un sous-anneau de  $C$ , et comme  $C$  n'est pas l'anneau nul,  $\theta'(\mathbf{K})$  est un corps. Nous allons montrer que  $\theta'(\mathbf{K}) = \tilde{B}$  ce qui permettra de conclure. Comme  $\theta'\varphi = \psi$ ,  $\theta'(\mathbf{K})$  contient  $B$ , et donc  $\theta'(\mathbf{K})$  contient  $\tilde{B}$ . Soit  $\iota': \tilde{B} \rightarrow \theta'(\mathbf{K})$  le morphisme déduit de l'inclusion  $\tilde{B} \subset \theta'(\mathbf{K})$  et  $\psi': A \rightarrow \theta'(\mathbf{K})$  le morphisme déduit de  $\psi$  et de l'inclusion de  $B = \psi(A)$  dans  $\theta'(\mathbf{K})$ . On note par ailleurs  $\theta''$  le morphisme  $\mathbf{K} \rightarrow \theta'(\mathbf{K})$  induit par corestriction. Alors  $\iota' \circ \tilde{\theta}$  et  $\theta''$  sont des morphismes de  $\mathbf{K}$  vers  $\theta'(\mathbf{K})$  qui vérifient  $\theta''\varphi = \psi'$  et  $(\iota'\tilde{\theta})\varphi = \psi'$ . Par hypothèse sur  $\mathbf{K}$  (et en prenant  $\mathbf{L} = \theta'(\mathbf{K})$ ), on a donc  $\iota'\tilde{\theta} = \theta''$ . Comme  $\theta''$  est surjectif,  $\iota'$  est surjectif. Comme  $\iota'$  est le morphisme déduit de l'inclusion de  $\tilde{B}$  dans  $\theta'(\mathbf{K})$ , on a donc  $\tilde{B} = \theta'(\mathbf{K})$  et donc (en utilisant l'hypothèse sur  $\mathbf{K}$  avec  $\mathbf{L} = \tilde{B}$ )  $\tilde{\theta} = \theta''$ . Par définition de  $\tilde{\theta}$  et  $\theta''$ , on en déduit l'égalité  $\theta = \theta'$ , ce qui conclut.  $\square$

*Exemple.* Si  $\mathbf{K}$  est un corps, la composition des morphismes d'inclusion  $\mathbf{K}[X] \rightarrow \mathbf{K}[[X]]$  et  $\mathbf{K}[[X]] \rightarrow \mathbf{K}((X))$  induit un morphisme de corps  $\iota: \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}((X))$ . Voici comment on peut l'expliciter : soit  $F$  un élément de  $\mathbf{K}(X)$ , que l'on écrit  $F = \frac{P}{Q}$  avec  $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$  la plus grande puissance de  $X$  divisant  $Q$ . On peut alors écrire  $Q = X^n R$ , avec  $R \in \mathbf{K}[X]$  et  $R(0) \neq 0$ . D'après l'exercice 5 de la feuille 1,  $R$  est un élément inversible de  $\mathbf{K}[[X]] \subset \mathbf{K}((X))$ . Ainsi  $\frac{1}{X^n} P R^{-1}$  est un élément bien défini de  $\mathbf{K}((X))$ , et correspond à l'image de  $F$  par  $\iota$ .

## 5.4 Sur les usages en matière de notations

Nous terminons par quelques remarques concernant les notations pour les anneaux localisés. Outre la notation générique  $S^{-1}A$ , d'autres notations peuvent être utilisées lorsque  $S$  a une forme particulière.

On a déjà vu la notation  $\text{Frac}(A)$  lorsque  $A$  est intègre et  $S = A \setminus \{0\}$ . Cette notation est parfois aussi utilisée lorsque  $S$  est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas diviseurs de zéro (ici  $A$  n'est plus nécessairement intègre) ; attention, dans ce cas plus général  $\text{Frac}(A)$  n'est pas nécessairement un corps ; on l'appelle *l'anneau total des fractions* de  $A$ .

Lorsque  $\mathcal{I}$  est un idéal premier de  $A$  et  $S = A \setminus \mathcal{I}$ ,  $S^{-1}A$  est souvent noté  $A_{\mathcal{I}}$ . Ceci se retrouve dans la notation  $\mathbf{Z}_{(p)}$  ( $p$  nombre premier), où  $(p)$  peut être vue comme une notation condensée de l'idéal  $p\mathbf{Z}$ . (on aurait pu aussi utiliser la notation  $\mathbf{Z}_{(p)}$ , plus cohérente avec les autres notations utilisées dans ce cours).

Lorsque  $S$  est de la forme  $\{a^n\}_{n \in \mathbf{N}}$  où  $a \in A$ ,  $S^{-1}A$  est souvent noté  $A_a$ . Attention, dans certains cas, cette notation entre en conflit avec d'autres notations répandues. Par exemple, si  $p$  est un nombre premier,  $\mathbf{Z}_p$  désigne en général ce qu'on appelle l'anneau des entiers  $p$ -adiques, qui est distinct du localisé de  $\mathbf{Z}$  par rapport à  $\{p^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ . On peut également trouver la notation  $A\left[\frac{1}{a}\right]$ , déjà rencontrée pour l'anneau  $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$  ( $x$  un entier non nul). Ceci se justifie par le fait que lorsque  $A$  est intègre et  $a \neq 0$ ,  $S^{-1}A$  s'identifie à l'image dans  $\text{Frac}(A)$  de l'unique morphisme de  $A$ -algèbre de  $A[X]$  vers  $\text{Frac}(A)$  qui envoie  $X$  sur  $\frac{1}{a}$ .