Le cas le plus simple : corps des fractions d'un anneau intègre

On a un anneau intègre A et on veut construire ou déterminer un corps qui contient A et qui soit en un sens "le plus petit possible" : le corps des fractions de A, noté $\mathrm{Frac}(A)$.

Exemple : dans le cas où $A = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont des corps contenant $\mathbf{Z}$; le corps $\mathbf{Q}$ est clairement le plus petit possible ($\mathbf{Q}$ n'a pas de sous-corps strict contenant $\mathbf{Z}$; d'ailleurs $\mathbf{Q}$ n'a pas de sous-corps strict)

- **Cas où on connaît un surcorps de** A

  Si $\mathbf{K}$ est un surcorps de A connu, le corps des fractions de A est le sous-ensemble de $\mathbf{K}$ décrit par :
  $$\{\frac{a}{b}\}_{a\in A, b\in A\setminus\{0\}}$$
  Noter que ceci a un sens car tout élément non nul de A est un élément non nul de $\mathbf{K}$ et donc possède un inverse dans $\mathbf{K}$.

  Exemple : construire le corps des fractions de $\mathbf{Z}[i] \subset \mathbf{C}$; montrer que c'est $\{a + bi, \quad a, b \in \mathbf{Q}\}$
- **Cas où on ne connaît pas de surcorps de** A

  On construit $\mathrm{Frac}(A)$ abstraitement en quotientant l'ensemble $A \times (A \setminus \{0\})$ par la relation d'équivalence "produit en croix" : $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $ab' = a'b$. L'addition et la multiplication sont données par les règles usuelles de calcul des fractions : $(a, b) + (a', b') = (ab' + a'b, bb')$ et $(a, b) \times (a', b') = (aa', bb')$ La classe de (a, b) est notée $\frac{a}{b}$

  On a besoin de cette construction par exemple pour la construction "originelle" de $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{Z}$
- **Propriété caractéristique** Le corps des fractions d'un anneau intègre A est un corps $\mathbf{K}$ contenant A et tel que tout corps $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{A}$ "contient $\mathbf{K}$" (on devrait dire : contient un sous-corps isomorphe comme A-algèbre à $\mathbf{K}$)

Un peu moins simple : on inverse certains éléments non nuls d'un anneau intègre mais pas tous

Il est important de réaliser qu'on a déjà vu en exercice des exemples de telles situations : les anneaux $\mathbf{Z}_{(p)}$ (p nombre premier) et $\mathbf{Z}[1/x]$ (x entier non nul).

La motivation générale est que l'étude des propriétés arithmétiques (ou géométriques, dans le cadre de la géométrie algébrique) des anneaux intègres peut être facilitée en inversant certains de ses éléments. Ceci correspond moralement à l'idée de localisation en analyse (étude locale de fonctions) et en géométrie. L'une des difficultés de ce genre de technique est qu'on a souvent besoin ensuite de "revenir au global". Dans notre contexte, ceci nécessite en général "de ne pas trop inverser". De ce point de vue, le passage au corps des fractions d'un anneau intègre constitue en général une simplification trop radicale des propriétés arithmétiques de l'anneau.

Pour formaliser l'idée d'"inverser certains éléments non nuls mais pas tous", on a besoin de la notion de *partie multiplicative* d'un anneau intègre A : un ensemble S d'éléments de A contenant 1_A et pas 0_A, et stable par multiplication (**attention, dans le cadre général, on autorisera les parties multiplicatives à contenir** 0). Les éléments de S constituent les éléments qu'on souhaite rendre inversibles.

Le but est alors de construire ou déterminer un anneau intègre qui contient A dans lequel tous les éléments de S sont inversibles et qui soit en un sens "le plus petit possible" : l'anneau localisé de A par rapport à S, noté $S^{-1}A$. Le cas du corps des fractions est le cas particulier où S est l'ensemble des éléments non nuls de A ; il est important de réaliser que dans ce dernier cas le fait que S soit stable par multiplication traduit justement l'intégrité de A

Exemples : si S est l'ensemble constitué de tous les entiers non multiples d'un nombre premier p, on trouve $\mathbf{Z}_{(p)}$. Si S est l'ensemble constitué de toutes les puissances d'un entier non nul x, on trouve $\mathbf{Z}[1/x]$.

Il est à noter également que lors du passage de A à $S^{-1}A$ on doit parfois inverser plus d'éléments que les seuls éléments de S : dans $\mathbf{Z}[1/6]$ on a rendu 6 et toutes ses puissances inversibles, mais comme $6 = 2 \times 3$, 2 et 3 (ainsi que toutes leurs puissances) ont nécessairement été également rendus inversibles

- **Cas où on connaît un surcorps de** A

  Si $\mathbf{K}$ est un surcorps de A connu, le localisé de A par rapport à S est le sous-ensemble de $\mathbf{K}$ décrit par :
  $$\{\frac{a}{b}\}_{a\in A, b\in S}$$
  Noter que ceci a un sens car tout élément non nul de A est un élément non nul de $\mathbf{K}$ et donc possède un inverse dans $\mathbf{K}$, et par ailleurs S ne contient pas 0.
- **Cas où on ne connaît pas de surcorps de** A

  On construit $S^{-1}A$ abstraitement en quotientant l'ensemble $A \times S$ par la relation d'équivalence "produit en croix" : $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $ab' = a'b$. L'addition et la multiplication sont données par les règles usuelles de calcul des fractions : $(a, b) + (a', b') = (ab' + a'b, bb')$ et $(a, b) \times (a', b') = (aa', bb')$ La classe de (a, b) est notée $\frac{a}{b}$
- **Propriété caractéristique** Le localisé d'un anneau intègre A par rapport à une partie multiplicative S est un anneau intègre B contenant A tel que tous les éléments de S sont inversibles dans B et tel que si C est un anneau intègre contenant A et tel que que tous les éléments de S sont inversibles dans C, alors "C contient B" (on devrait dire : contient un sous-anneau isomorphe comme A-algèbre à B)

La notion générale de localisation

Dans la pratique, la notion de localisé d'un anneau intègre par rapport à une partie multiplicative ne suffit pas toujours. Ceci est bien illustré par l'exemple introductif des notes de cours (noter que l'anneau des fonctions continues sur un intervalle n'est pas intègre).

On considère donc de manière générale une partie multiplicative S d'un anneau A non nécessairement intègre, au sens évoqué précédemment : S contient 1_A et est stable par multiplication ; par contre on ne demande pas nécessairement que S ne contienne pas 0_A (pour ce dernier point, cela peut cependant dépendre des références). On veut construire ou déterminer "un anneau contenant A, dans lequel tous les éléments de S deviennent inversibles, et le plus petit possible pour ces propriétés".

Ici, il faut bien faire attention, et beaucoup de choses valables dans la situation précédente (localisé d'un anneau intègre) ne le sont plus, ou en tout cas sont à nuancer

- Le nouveauté fondamentale est que le localisé $S^{-1}A$ n'est plus nécessairement un suranneau de A. Il est relié à A par un morphisme de localisation qui n'est pas nécessairement injectif. Un exemple prototypique est lorsqu'on localise $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ par rapport à $S=\{-1,1\}\times\{1,0\}$: le localisé est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et le morphisme de localisation est donnée par la première projection $(a,b)\mapsto a$ de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$. Le fait que le morphisme de localisation n'est pas nécessairement injectif est précisément lié au fait que S peut contenir des diviseurs de zéro. Autre façon de l'exprimer : si on veut rendre certains éléments inversibles , cela nécessite parfois d'en " tuer" d'autres. Un exemple un peu extrême est donné par le cas où l'on veut inverser 0_A : ceci force tous les éléments de A à s'annihiler, et le localisé est l'anneau nul
- En particulier, la caractérisation de $S^{-1}A$ ne peut pas se faire uniquement en termes de suranneau de A dans lequel tout élément de S devient inversible : il va falloir considérer tous les morphismes $A\to B$ pour lesquels les images des éléments de S deviennent inversibles dans B ; le morphisme de localisation est alors en un sens " le plus petit de ces morphismes" ; *cf.* les notes de cours pour un énoncé plus précis
- On construit $S^{-1}A$ abstraitement similairement au cas d'un anneau intègre en quotientant l'ensemble $A\times S$ par une certaine relation d'équivalence **mais on peut constater que la relation d'équivalence "produit en croix" ne suffit plus** (ce n'est plus en général une relation d'équivalence). La bonne relation à considérer est : $(a,b)\sim(a',b')$ si et seulement s'il existe $s\in S$ tel que $s(ab'-a'b)=0$. Si S ne contient pas de diviseur de zero, on retrouve le produit en croix. L'addition et la multiplication sont toujours données par les règles usuelles de calcul des fractions : $(a,b)+(a',b')=(ab'+a'b,bb')$ et $(a,b)\times(a',b')=(aa',bb')$
- En lien également avec tout ce qui précède, il faut faire attention aux notations lorsqu'on manipule des localisés d'anneaux non nécessairement intègres. On peut noter $\frac{a}{b}$ la classe de (a,b), mais il faut se rappeler que $\frac{a}{1_A}$ peut être nul sans que a le soit : c'est exactement le cas quand a est un élément non nul de A "tué" par un élément de S. Dans l'exemple de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ci-dessus, prendre par exemple $a=(0,1)$ qui est tué par $(1,0)$.
