Université de Rennes 1 — Année universitaire 2020-2021

Licence de mathématiques

Module Anneaux et arithmétique

Contrôle continu n°2

Jeudi 8 avril 2021, 16h15 – 17h45

La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.* Les questions jugées plus délicates sont indiquées par **(*)**. Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Si vous souhaitez utiliser un résultat d'un exercice de TD non énoncé en cours, un tel résultat doit être redémontré.

Exercice 1

1. Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$. Rappeler la définition de « P est un élément irréductible de $\mathbf{K}[X]$ »
2. Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 2 ou 3 qui n'a pas de racine dans $\mathbf{K}$. Montrer que P est un élément irréductible de $\mathbf{K}[X]$.
3. Donner un exemple d'un corps $\mathbf{K}$ et d'un élément $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré 4 qui n'a pas de racine dans $\mathbf{K}$ et n'est pas irréductible dans $\mathbf{K}[X]$ dans les cas suivants :
   (a) $\mathbf{K}$ est de caractéristique 0
   (b) $\mathbf{K}$ est de caractéristique 2
4. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que P est l'élément de $\mathbf{F}_3[X]$ donné par $P := X^3 + [2]_3 X + [1]_3$. On pose $\mathbf{K} := \mathbf{F}_3[X]/\langle P \rangle$. Justifier que $\mathbf{K}$ est un corps. On note π le morphisme quotient $\mathbf{F}_3[X] \to \mathbf{K}$ et $\alpha := \pi(X)$. Donner, *sans justification*, le cardinal de $\mathbf{K}$ et une base du $\mathbf{F}_3$-espace vectoriel $\mathbf{K}$. Dans toute la suite, le résultat des calculs dans $\mathbf{K}$ devront être exprimés dans cette base.
5. Calculer α^2, α^4, α^8. En déduire α^{13}. On vérifiera que $\alpha^{13} = [2]_3$.
6. Déduire de la question précédente un générateur de $\mathbf{K}^\times$.
7. *Pour cette question, on demande de ne pas utiliser les résultats du cours sur les cardinaux des sous-corps des corps finis.* Existe-t-il un élément β de $\mathbf{K}$ tel que $\beta^8 = [1]_3$? Existe-t-il un sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal 3 ? de cardinal 9 ? de cardinal n, pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{3, 9\}$?
8. **(*)** Soit $Q \in \mathbf{F}_3[X]$ de degré 2 et vérifiant $\forall a \in \mathbf{F}_3$, $Q(a) \neq 0$. Montrer que Q est un élément irréductible de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice 2

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on pose $\sqrt{I} := \{a \in A, \quad \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad a^n \in I\}$.

1. Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A qui contient I. L'idéal I est dit *radical* s'il vérifie $\sqrt{I} = I$.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que l'idéal $\sqrt{I}$ est radical.
3. Soit B un anneau, $\varphi \colon A \to B$ un morphisme d'anneaux et J un idéal radical de B. L'idéal $\varphi^{-1}(J)$ est-il nécessairement un idéal radical de A ?
4. L'idéal $6\mathbf{Z}$ est-il un idéal radical de $\mathbf{Z}$? Donner une infinité d'exemples d'idéaux de $\mathbf{Z}$ qui sont radicaux mais pas premiers.
5. Soit B et C des anneaux non nuls. Montrer que $\sqrt{0}$ (le radical de l'idéal nul) n'est *pas* un idéal premier de $B \times C$.
6. **(*)** Donner un exemple d'un anneau A non intègre tel que $\sqrt{0}$ est un idéal premier de A.