Université de Rennes 1 Année universitaire 2020-2021
Licence de mathématiques
Module Anneaux et arithmétique

Contrôle continu n°1
Jeudi 11 mars 2021, 16h15 – 17h45

La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.* Les questions jugées plus délicates sont indiquées par **(*)**. Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Si vous souhaitez utiliser un résultat d'un exercice de TD non énoncé en cours, un tel résultat doit être redémontré.

Exercice 1

Soit φ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{R}$ qui envoie X sur $\sqrt{5}$ (on admettra que $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$). Soit $\mathbf{Z}[\sqrt{5}] := \varphi(\mathbf{Z}[X])$.

1. Que vaut $\varphi(1 + X + X^2)$?
2. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, et qu'il est intègre et isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle$.
3. Montrer que l'application qui à $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ associe $a + b\sqrt{5}$ est une bijection de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.
4. Soit $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ et $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = a+b\sqrt{5}$; on pose alors $N(x) := (a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})$. Montrer que $N(x) \in \mathbf{Z}$. Pour tous $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$, montrer qu'on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
5. Soit $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. Déduire de la question précédente que $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ si et seulement si $N(x) \in \{1, -1\}$.
6. Existe-t-il des éléments $n \in \mathbf{Z}$ tels que $n^2 = 2 \pmod 5$? Existe-t-il des éléments $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ tels que $N(x) = 2$?
7. Montrer que $3 + \sqrt{5}$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.
8. **(*)** L'idéal de $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ engendré par $3 + \sqrt{5}$ est-il premier ?
9. **(*)** Le groupe $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ est-il fini ? (on pourra considérer l'élément $2 + \sqrt{5}$)

Exercice 2

1. Soit A un anneau, $\mathcal{I}$ un idéal de A. Donner la définition de « $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de A ».
2. Soit A et B des anneaux, $\varphi \colon A \to B$ un morphisme d'anneaux *surjectif.*
   (a) Compléter la phrase suivante : « l'application $\mathcal{J} \mapsto \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de B sur [. . .], de bijection réciproque $\mathcal{I} \mapsto \varphi(\mathcal{I})$ » (pas de justification demandée).
   (b) Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal maximal de A.
3. Soit A un anneau. On définit le *radical de Jacobson* de A comme l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Déterminer le radical de Jacobson dans les cas suivants : A est un corps, $A = \mathbf{Z}$, p est un nombre premier et $A = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Exhiber un anneau dont le radical de Jacobson n'est pas l'idéal nul.
4. **(*)** Soit A un anneau et $a \in A$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) a appartient au radical de Jacobson de A
   (b) pour tout élément b de A, $1_A - ab \in A^\times$