Université de Rennes 1 — Année universitaire 2020-2021
Licence de mathématiques
Module Anneaux et arithmétique

Contrôle continu n°1
Jeudi 11 mars 2021, 16h15 – 17h45
Corrigé

Exercice 1

Soit φ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{R}$ qui envoie X sur $\sqrt{5}$ (on admettra que $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$). Soit $\mathbf{Z}[\sqrt{5}] := \varphi(\mathbf{Z}[X])$.

1. Que vaut $\varphi(1 + X + X^2)$?
Solution *: Comme φ est un morphisme d'anneaux qui envoie X sur $\sqrt{5}$, on a*
$$\varphi(1 + X + X^2) = \varphi(1) + \varphi(X) + \varphi(X)^2 = 1 + \sqrt{5} + 5 = 6 + \sqrt{5}.$$

2. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, et qu'il est intègre et isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle$.
Solution *: Comme $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est (par définition) l'image de l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ par le morphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{R}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$. Comme $\mathbf{R}$ est un corps, donc un anneau intègre et $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est un anneau intègre.*
Le morphisme φ induit par corestriction un morphisme d'anneaux surjectif (abusivement encore noté φ) $\varphi\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. Pour montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$.
Montrons l'inclusion $(X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X] \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a $\varphi(X^2 - 5) = \varphi(X)^2 - 5 = 5 - 5 = 0$. Ainsi $X^2 - 5 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un idéal de $\mathbf{Z}[X]$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient donc l'idéal de $\mathbf{Z}[X]$ engendré par $X^2 - 5$, c'est-à-dire $(X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$.
Montrons à présent l'inclusion $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset (X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme l'élément $X^2 - 5 \in \mathbf{Z}[X]$ a un coefficient dominant égal à 1, donc inversible dans $\mathbf{Z}[X]$, la division euclidienne de P par $X^2 - 5$ dans $\mathbf{Z}[X]$ existe. Elle s'écrit $P = (X^2 - 5) \cdot Q + R$ où $Q, R \in \mathbf{Z}[X]$ et $\deg(R) < \deg(X^2 - 5) = 2$. En particulier, il existe $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $R = a + b \cdot X$. Appliquons le morphisme d'anneaux φ à l'égalité $P = (X^2 - 5) \cdot Q + R$. Sachant que P et $X^2 - 5$ sont des éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on obtient l'égalité
$$0 = 0 \cdot \varphi(Q) + \varphi(R) = a + b\sqrt{5}.$$
Ainsi $a + b\sqrt{5} = 0$. Si a est non nul, on en tire aussitôt que $\sqrt{5} \in \mathbf{Q}$, contradiction. Donc $a = 0$ et $b\sqrt{5} = 0$ donc finalement $b = 0$ (intégrité de $\mathbf{R}$). Ainsi $R = 0$ et $P = (X^2 - 5) \cdot Q$, donc $P \in (X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$. Ceci achève de montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset (X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$, donc l'égalité $\mathrm{Ker}(\varphi) = (X^2 - 5) \cdot \mathbf{Z}[X]$ et l'isomorphisme demandé.

3. Montrer que l'application qui à $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ associe $a + b\sqrt{5}$ est une bijection de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.
Solution *: Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. On a $a + b\sqrt{5} = \varphi(a + bX)$, donc $a + b\sqrt{5} \in \varphi(\mathbf{Z}[X]) = \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. Ainsi la formule de l'énoncé définit bien une application $\theta\colon \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.*
Montrons que θ est injective. Soit $a, b, a', b' \in \mathbf{Z}$ tels que $\theta(a, b) = \theta(a', b')$. On a donc $a + b\sqrt{5} = a' + b'\sqrt{5}$ soit $(a - a') + (b - b')\sqrt{5} = 0$. En raisonnant comme à la question précédente, on en tire $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$ soit $a = a'$ et $b = b'$. Donc θ est injective.

Montrons à présent que θ est surjective, ce qui permettra de conclure. Soit $\alpha \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ et $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $\alpha = \varphi(P)$. Soit $P = (X^2-5)\cdot Q + a + b\cdot X$ où $Q \in \mathbf{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbf{Z}$ la division euclidienne de P par X^2-5 dans $\mathbf{Z}[X]$ (cf. question précédente) En appliquant φ à l'égalité précédente, on obtient $\varphi(P) = a+b\sqrt{5}$ soit $\alpha = \theta(a,b)$. Donc θ est bien surjective.

4. Soit $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ et $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = a+b\sqrt{5}$; on pose alors $N(x) := (a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})$. Montrer que $N(x) \in \mathbf{Z}$. Pour tous $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$, montrer qu'on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
Solution : *Notons que la question précédente montre que le couple $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ de l'énoncé est uniquement déterminé et donc que $N(x)$ est bien défini. Par un calcul rapide, on obtient la relation $N(x) = a^2 - 5b^2$. Comme $a, b \in \mathbf{Z}$, on déduit aussitôt de cette expression qu'on a bien $N(x) \in \mathbf{Z}$.*
Soit $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$, $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{5}$ et $(a',b') \in \mathbf{Z}^2$ tel que $y = a' + b'\sqrt{5}$. Un calcul immédiat montre qu'on a
$$xy = (aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5}.$$
Comme $aa' + 5bb' \in \mathbf{Z}$ et $ab' + a'b \in \mathbf{Z}$, cette expression montre qu'on a
$$N(xy) = [(aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5}][(aa' + 5bb') - (ab' + a'b)\sqrt{5}]$$
or
$$\begin{aligned} &(aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})(a' + b'\sqrt{5}) \\ \textit{et}\quad &(aa' + 5bb') - (ab' + a'b)\sqrt{5} = (a - b\sqrt{5})(a' - b'\sqrt{5}) \end{aligned}$$
Ainsi in a bien $N(xy) = N(x)N(y)$.
Autre argument plus conceptuel : *l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ qui envoie X sur $-\sqrt{5}$ a un noyau qui contient X^2-5, et se factorise donc en un morphisme $\tau\colon \mathbf{Z}[X]/\langle X^2-5\rangle \to \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. En identifiant $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2-5\rangle$ à $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ via l'isomorphisme de la question précédente, on voit que le morphisme τ est l'application qui pour tout $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ envoie $a + b\sqrt{5}$ sur $a - b\sqrt{5}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ on a $N(x) = x\cdot\tau(x)$ et comme τ est un morphisme d'anneaux la propriété demandée pour N s'en déduit aussitôt.*

5. Soit $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. Déduire de la question précédente que $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ si et seulement si $N(x) \in \{1, -1\}$.
Solution : *Supposons que'on a $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$. Soit $y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ tel que $xy = 1$. On a donc $N(xy) = N(1)$. D'après la question précédente, on a donc $N(x)N(y) = 1^2 = 1$. Comme $N(x)$ et $N(y)$ sont dans $\mathbf{Z}$, cette relation impose $N(x) \in \{1, -1\}$.*
Réciproquement, supposons qu'on a $N(x) \in \{1, -1\}$. Soit $a, b \in \mathbf{Z}$ tel que $x = a + b\sqrt{5}$. Soit $y = a - b\sqrt{5}$. On a $y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ (et donc également $-y\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ et d'après l'hypothèse sur $N(x)$, on a $xy = 1$ ou $xy = -1$ soit $x(-y) = 1$ dans la deuxième éventualité. Dans les deux cas, on en déduit bien que $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$.

6. Existe-t-il des éléments $n \in \mathbf{Z}$ tels que $n^2 = 2 \pmod 5$? Existe-t-il des éléments $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ tels que $N(x) = 2$?
Solution : *Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors il existe $a \in \{0,1,2,3,4\}$ tel que $n = a \pmod 5$, d'où $n = a^2 \pmod 5$. Mais $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4 \pmod 5$ et $4^2 = 1 \pmod 5$. Aucune des valeurs obtenues n'étant congrue à 2 modulo 5, on en déduit qu'on ne peut pas avoir $n^2 = 2 \pmod 5$; au passage, on en déduit également qu'on ne peut pas avoir $n^2 = -2 \pmod 5$, autrement dit $n^2 = 3 \pmod 5$.*

Supposons qu'il existe $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *tel que* $N(x) = 2$. *Soit* $a, b \in \mathbf{Z}$ *tel que* $x = a + b\sqrt{5}$. *On a donc* $a^2 - 5b^2 = 2$, *d'où en particulier* $a^2 = 2 \pmod 5$. *D'après la question précédente, c'est impossible. Ainsi il n'existe pas d'élément* $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *tel que* $N(x) = 2$.

7. Montrer que $3 + \sqrt{5}$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.
Solution : *On a* $N(3+\sqrt{5}) = 3^2 - 5 = 4$. *D'après la question 5,* $3 + \sqrt{5} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$. *Soit* $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *tels que* $3 + \sqrt{5} = xy$. *Montrons que* x *ou* y *est un élément de* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$, *ce qui permettra de conclure. On a* $N(3+\sqrt{5}) = N(xy)$ *soit, d'après la question 4,* $4 = N(x)N(y)$. *Comme* $N(x)$ *et* $N(y)$ *sont des entiers, on a*
$$(N(x), N(y)) \in \{(1,4), (-1,-4), (4,1), (-4,-1), (2,2), (-2,-2)\}$$
D'après la question, $(N(x), N(y)) = (2,2)$ *est exclu. Par un raisonnement similaire à celui de la question,* $(N(x), N(y)) = (-2,-2)$ *est également exclu. Donc nécessairement*
$$(N(x), N(y)) \in \{(1,4), (-1,-4), (4,1), (-4,-1)\}$$
Dans tous les cas, on a donc soit $N(x) \in \{1, -1\}$, *soit* $N(y) \in \{1, -1\}$ *D'après la question 5, on a donc* $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ *ou* $y \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$.

8. **(*)** L'idéal de $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ engendré par $3 + \sqrt{5}$ est-il premier ?
Solution : *Soit* $\mathcal{I}$ *l'idéal en question. On a* $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 4 = 2.2$. *En particulier* $2.2 \in \mathcal{I}$. *Si on montre que* $2 \notin \mathcal{I}$, *on pourra en déduire que* $\mathcal{I}$ *n'est pas premier. Supposons qu'on a* $2 \in \mathcal{I}$. *Il existe donc* $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *tel que* $2 = (3+\sqrt{5})x$. *Mais par ailleurs il existe un unique* x réel *qui vérifie la relation précédente, à savoir*
$$x = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$
Si on avait $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$, *on pourrait donc trouver* $a, b \in \mathbf{Z}$ *tels que* $2(a + b\sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$, *soit en particulier* $2a = 3$, *ce qui est une contradiction. Finalement* $2 \notin \mathcal{I}$, *et* $\mathcal{I}$ *n'est pas un idéal premier de* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.
Autre argument : *En utilisant l'un des théorèmes d'isomorphismes du cours et l'isomorphisme entre* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *et* $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle$, *on voit que le quotient* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]/(3+\sqrt{5})\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *est isomorphe au quotient* $\mathbf{Z}[X]/\langle 3 + X, X^2 - 5\rangle$. *De l'égalité* $X^2 - 5 = (X+3)(X-3) + 4$, *on déduit l'égalité d'idéaux* $\langle 3+X, X^2-5\rangle = \langle 3+X, 4\rangle$ *dans* $\mathbf{Z}[X]$. *D'après l'un des théorèmes d'isomorphismes du cours,* $\mathbf{Z}[X]/\langle 4, 3+X\rangle$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}[X]/\langle X + [3]_4\rangle$. *Mais pour n'importe quel anneau* A *et n'importe quel* $a \in A$, *l'anneau quotient* $A[X]/\langle X - a\rangle$ *est isomorphe à* A. *En effet le morphisme* $A[X] \to A$ *d'évalution en* a *est surjectif de noyau* $\langle X - a\rangle$ *(cf. le corollaire 42 du chapitre 2). Ainsi* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]/(3+\sqrt{5})\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. *Comme 4 n'est pas premier,* $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ *n'est pas intègre et donc* $(3+\sqrt{5})\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ *n'est pas un idéal premier de* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.

9. **(*)** Le groupe $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ est-il fini ? (on pourra considérer l'élément $2 + \sqrt{5}$)
Solution : *On a* $N(2+\sqrt{5}) = 2^2 - 5 = -1$ *donc d'après la question 5,* $2 + \sqrt{5}$ *est un élément de* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$. *Si le groupe* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ *était fini, on pourrait trouver un entier strictement positif* n *tel que* $(2+\sqrt{5})^n = 1$. *Mais par ailleurs on sait que l'équation* $x^n = 1, \quad x \in \mathbf{R}$ *a comme ensemble de solutions* $\{1\}$ *ou* $\{1, -1\}$. *Or, d'après la question 3, on a* $2 + \sqrt{5} \neq 1$ *et* $2 + \sqrt{5} \neq -1$. *Donc le groupe* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ *est infini, et plus précisément le sous-groupe de* $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]^\times$ *engendré par* $2 + \sqrt{5}$ *est infini.*

Exercice 2

1. Soit A un anneau, $\mathcal{I}$ un idéal de A. Donner la définition de « $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de A ».
   Solution *: Selon le cours : $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de A si c'est un idéal propre de A et tout idéal $\mathcal{J}$ de A contenant $\mathcal{I}$ est soit égal à $\mathcal{I}$, soit égal à A.*

2. Soit A et B des anneaux, $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux *surjectif.*
   (a) Compléter la phrase suivante : « l'application $\mathcal{J} \mapsto \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de B sur [...], de bijection réciproque $\mathcal{I} \mapsto \varphi(\mathcal{I})$ » (pas de justification demandée).
   Solution *: Selon le cours : l'application $\mathcal{J} \mapsto \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de B sur l'ensemble des idéaux de A contenant* $\mathrm{Ker}(\varphi)$*, de bijection réciproque $\mathcal{I} \mapsto \varphi(\mathcal{I})$.*

   (b) Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal maximal de A.
   Solution *: Comme $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B, on a $\mathcal{J} \neq B$. D'après la question précédente, on a donc $\varphi^{-1}(\mathcal{J}) \neq \varphi^{1}(B)$. Or $\varphi^{-1}(B) = A$. Donc $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal propre de A. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A contenant $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ et distinct de $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{I} = A$. Comme $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ contient* $\mathrm{Ker}(\varphi)$*, il en est de même de $\mathcal{I}$. D'après la question précédente, il suffit donc de montrer que $\varphi(\mathcal{I}) = \varphi(A)$ autrement dit que $\varphi(\mathcal{I}) = B$. Comme $\mathcal{I}$ contient strictement $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$, d'après la question précédente et propriété de l'image directe, $\varphi(\mathcal{I})$ contient strictement $\varphi(\varphi^{-1}(\mathcal{J}))$. Toujours d'après la question précédente, on a $\varphi(\varphi^{-1}(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$. Comme $\varphi(\mathcal{I})$ contient strictement $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est un idéal maximal de B, on a $\varphi(\mathcal{I}) = A$, ce qui permet de conclure.*
   Autre démonstration : *Le morphisme φ étant surjectif, par l'un des théorèmes d'isomorphisme du cours, les anneaux quotients $B/\mathcal{J}$ et $A/\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ sont isomorphes. Comme $\mathcal{J}$ est un idéal maximal de B, $B/\mathcal{J}$ est un corps. Comme les anneaux quotients $B/\mathcal{J}$ et $A/\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ sont isomorphes, $A/\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est aussi un corps. Donc $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal maximal de A.*

3. Soit A un anneau. On définit le *radical de Jacobson* de A comme l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Déterminer le radical de Jacobson dans les cas suivants : A est un corps, $A = \mathbf{Z}$, p est un nombre premier et $A = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Exhiber un anneau dont le radical de Jacobson n'est pas l'idéal nul.
   Solution *: Notons que comme l'idéal nul est contenu dans n'importe quel idéal, le radical de Jacobson contient toujours l'idéal nul.*
   Si A est un corps, le seul idéal maximal de A est l'idéal nul. On en déduit aussitôt que le radical de Jacobson de A est l'idéal nul.
   Si $A = \mathbf{Z}$, les idéaux maximaux de A sont les $p \cdot \mathbf{Z}$, où p est premier. Soit x un élément du radical de Jacobson de A. Pour tout nombre premier p, x appartient à $p \cdot \mathbf{Z}$. En d'autres termes, pour tout nombre premier p, x est divisible par p. Nécessairement $x = 0$. On en déduit que le radical de Jacobson de A est l'idéal nul.
   Soit p un nombre premier et $A = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Soit $\pi\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ le morphisme quotient, qui est surjectif. Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de A. D'après la question précédente, $\pi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}$ contenant $p^2\mathbf{Z}$. D'après la description des idéaux maximaux de $\mathbf{Z}$, on a nécessairement $\pi^{-1}(\mathcal{J}) = p\mathbf{Z}$. Toujours d'après la question précédente, on a nécessairement $\mathcal{J} = \pi(p\mathbf{Z})$. Ainsi, A possède un seul idéal maximal, à savoir $\pi(p\mathbf{Z})$, et le radical de Jacobson de A est égal à cet idéal maximal. Comme $\pi(p) = [p]_{p^2}$ n'est pas nul,

ceci donne un exemple d'un anneau dont le radical de Jacobson n'est pas l'idéal nul.

4. **(*)** Soit A un anneau et $a \in A$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) a appartient au radical de Jacobson de A
   (b) pour tout élément b de A, $1_A - ab \in A^\times$

   ***Solution** : Démonstration de* $(a) \Rightarrow (b)$ *: on raisonne par contraposition ; on suppose donc qu'il existe un élément* b *de* A *tel que* $1_A - ab \notin A^\times$*. L'idéal de* A *engendré par* $1_A - ab$ *est donc un idéal propre, qui est donc contenu dans un idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* A *(en particulier* $1_A - ab \in \mathfrak{M}$*). Montrons que* $a \notin \mathfrak{M}$*. Si* a *était un élément de* $\mathfrak{M}$*, comme* $1_A = (1_A - ab) + ab$*, on obtiendrait que* $1_A \in \mathfrak{M}$*, ce qui contredit le fait que* $\mathfrak{M}$ *est un idéal propre de* A*. Donc* $a \notin \mathfrak{M}$*, ce qui montre que* a *n'est pas un élément du radical de Jacobson de* A*.*
   Démonstration de $(b) \Rightarrow (a)$ *: on raisonne par contraposition ; on suppose donc qu'il existe un idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* A *tel que* $a \notin \mathfrak{M}$*. Comme* $a \notin \mathfrak{M}$*, l'idéal* $\mathcal{I}$ *de* A *engendré par* $\mathfrak{M}$ *et* a *contient strictement l'idéal* $\mathfrak{M}$*. Comme* $\mathfrak{M}$ *est un idéal maximal, on a* $\mathcal{I} = A$*, en particulier* $1_A \in \mathcal{I}$*. Comme* $\mathcal{I}$ *est l'idéal de* A *engendré par* $\mathfrak{M}$ *et* a*, il existe donc* $b \in A$ *et* $c \in \mathfrak{M}$ *tel que* $1_A = c + ab$*. Pour un tel* b*, on a donc* $1 - ab \in \mathfrak{M}$*. En particulier, comme* $\mathfrak{M}$ *est un idéal propre, on a* $1 - ab \notin A^\times$*, ce qui conclut.*