Université de Rennes 1 Année 2020/2021

Algèbre et géométrie 1
Exercices corrigés

1. (Exercice 1.6) Pour chacune des formules suivantes, écrire sa négation et décider (démonstration), si cela à un sens, de leur validité respective :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

   Solution: La négation de la proposition est
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0.$$
   C'est la proposition initiale est valide : si on pose $x = y = 1$, on a bien $x + y = 2 > 0$.

2. (Exercice 1.7) Pour chacune des assertions suivantes relatives à une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, écrire la formule correspondante ainsi que sa négation et donner deux exemples qui satisfont l'assertion ainsi que deux autres qui ne la satisfont pas :
   (a) f est croissante et positive

   Solution: Cette propriété s'exprime formellement sous la forme
   $$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0).$$
   Sa négation s'écrit donc
   $$(\exists x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } f(x) \geq f(y)) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0).$$
   Les fonctions définies par $x \mapsto 0$ et $x \mapsto e^x$ satisfont cette propriété mais les fonctions définies par $x \mapsto -1$ ou $x \mapsto x$ ne la satisfont pas.

   (b) f prend parfois des valeurs positives

   Solution: Cette propriété s'exprime formellement sous la forme
   $$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$
   Sa négation s'écrit donc
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0.$$
   Les fonctions définies par $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ satisfont cette propriété mais les fonctions définies par $x \mapsto -1$ ou $x \mapsto -e^x$ ne la satisfont pas.

   (c) f est paire

> **Solution:** Cette propriété s'exprime formellement sous la forme
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x).$$
>
> Sa négation s'écrit donc
>
> $$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x).$$
>
> Les fonctions définies par $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2$ satisfont cette propriété mais les fonctions définies par $x \mapsto x$ ou $x \mapsto e^x$ ne la satisfont pas.

3. (Exercice 4.9) Soient P, Q, R trois points du plan, K le symétrique de P par rapport à R, J le point défini par $\overrightarrow{RJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RQ}$ et I le milieu de $\{P, Q\}$. Montrer que I, J, K sont alignés.

> **Solution:** En traduisant les hypothèses en termes de barycentres, on voit d'une part que R est le barycentre de $(P, 1)$ et $(K, 1)$ et que J est le barycentre de $(R, 2)$ et de $(Q, 1)$. Par associativité des barycentres, on en déduit que J est le centre de gravité du triangle $\{P, Q, R\}$. D'autre part, psuique I est le milieu $\{P, Q\}$, la droite (IK) est une médiane du triangle $\{P, Q, R\}$ et on a donc bien $J \in (IK)$.

4. (Exercice 4.12) Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme non aplati, K le milieu de $\{P, S\}$, I le milieu de $\{Q, R\}$ et J le points défini par $\overrightarrow{PJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$.
   (a) Exprimez K comme barycentre de P et S ainsi que J comme barycentre de P et Q.

   > **Solution:** On a $K = \mathrm{Bar}((P, 1), (S, 1))$ et $J = \mathrm{Bar}((P, 1), (Q, 2))$.

   (b) Montrer que les droites (SJ) et (QK) sont sécantes en un point G que l'on exprimera comme barycentre de P, Q et S.

   > **Solution:** Soit
   > $$G := \mathrm{Bar}((P, 1), (S, 1), (Q, 2)).$$
   > Par associativité des barycentres, on a $G = \mathrm{Bar}((K, 2), (Q, 2))$ mais aussi $G = \mathrm{Bar}((P, 1), (J, 3))$. On a donc bien $G \in (KQ)$ et $G \in (PJ)$.

   (c) Montrer que les droites (SJ), (QK) et (PI) sont concourantes.

   > **Solution:** Puisque (P, Q, R, S) est un parallélogramme, il en va de même de (P, Q, I, K) : en effet $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QI}$. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur mileu et on sait que G est le milieu de $\{K, Q\}$. C'est donc bien aussi le milieu de $\{I, P\}$ et on a ainsi aussi $G \in (IP)$.

5. (Exercice 4.15) Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Solution: Si $P = Q$, alors tous les points du plan satistont la condition et on suppose maintenant que $P \neq Q$. Si G désigne le centre de gravité du triangle $\{P, Q, R\}$, on a $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MG}$. La conditions signifie donc que $3\overrightarrow{MG}$, et donc aussi $\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{PQ}$, c'est à dire que que $M = G$ ou que les droites (MG) et (PQ) sont parallèles. On en déduit que l'ensemble des points M que l'on cherche est la droite parallèle à (PQ) et passant par G.

6. (Exercice 5.7) Soient P et Q deux points quelconques, I le barycentre de $(P, 3)$ et $(Q, 1)$ et J le barycentre de $(P, 3)$ et $(Q, -1)$.

(a) Montrer que pour tout point M, on a

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{9}{8} MP^2 - \frac{1}{8} MQ^2.$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} &= \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MQ}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{MP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}\right) \\
&= \frac{9}{8}\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} + \frac{3}{8}\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MP} - \frac{3}{8}\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} - \frac{1}{8}\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MQ} \\
&= \frac{9}{8} MP^2 - \frac{1}{8} MQ^2.
\end{aligned}$$

(b) En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que $MP = \frac{1}{3} MQ$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Solution: On en déduit que $MP = \frac{1}{3} MQ$ si et seulement si le triangle $\{I, M, J\}$ est rectangle en M. On trouve donc le cercle de diamètre $\{I, J\}$. Son centre est le milieu de $\{I, J\}$ et son rayon vaut $\frac{1}{2} IJ$.

7. (Exercice 5.9) Soient P, Q, R trois points quelconques et G le barycentre de $(P, 2)$, $(Q, 1)$ et $(R, -1)$.

(a) Montrer que si M est un point quelconque, alors

$$2MP^2 + MQ^2 - MR^2 = 2GP^2 + GQ^2 - GR^2 + 2MG^2.$$

Solution: En utilisant les relations de Chasles, on voit que

$$\begin{aligned}
MP^2 &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GP} + GP^2, \\
MQ^2 &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GQ} + GQ^2 \quad \text{et} \\
MR^2 &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GR} + GR^2.
\end{aligned}$$

En effectuant une combinaison linéaire, on en déduit que

$$2MP^2 + MQ^2 - MR^2 = 2MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} - \overrightarrow{GR}) + 2GP^2 + GQ^2 - GR^2.$$

Et on conclut en rappelant que

$$2\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}-\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{0}$$

puisque G est le barycentre de $(P,2)$, $(Q,1)$ et $(R,-1)$.

(b) En déduire que l'application $M \mapsto 2MP^2+MQ^2-MR^2$ possède un minimum que l'on déterminera.

Solution: Le minimum est atteint en G puisque

$$2MP^2+MQ^2-MR^2=2GP^2+GQ^2-GR^2+2MG^2 \leq 2GP^2+GQ^2-GR^2.$$

8. (Exercice 6.15)

(a) Montrer que si n est un entier quelconque, alors $8n+7$ et $6n+5$ sont toujours premiers entre eux.

Solution: Supposons que $d \in \mathbb{N}$ divise ces deux nombres. Alors,

$$d \mid 6\times(8n+7)-8\times(6n+5)=2.$$

Or ces nombres sont impairs. Donc nécessairement $d=1$.

(b) Même question avec $2n+3$ et n^2+3n+2.

Solution: Supposons que $d \in \mathbb{N}$ divise ces deux nombres. Alors,

$$d \mid 2\times(n^2+3n+2)-n\times(2n+3)=3n+4.$$

On en déduit que

$$d \mid 3\times(2n+3)-2\times(3n+4)=1.$$

(c) Même question avec $5^{n+1}+6^{n+1}$ et 5^n+6^n.

Solution: Supposons que $d \in \mathbb{N}$ divise ces deux nombres. Alors,

$$d \mid (5^{n+1}+6^{n+1})-5\times(5^n+6^n)=6^n.$$

et

$$d \mid 6\times(5^n+6^n)-(5^{n+1}+6^{n+1})=5^n.$$

Or 5 et 6 sont premier entre eux et on sait qu'alors 5^n et 6^n le sont aussi (puisque le pgcd des puissances est la puissance du pgcd).

9. (Exercice 6.17) Résoudre

$$a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad a\wedge b=18 \text{ et } a\vee b=360?$$

Solution: On peut poser $a = 18a'$ et $b = 18b'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$ et il s'agit alors de résoudre $a' \wedge b' = 1$ et $a' \vee b' = 20$. En considérant les diviseurs de 20, on trouve alors de manière exhaustive pour $\{a', b'\}$ les solutions $\{1, 20\}, \{4, 5\}$ ainsi que leurs opposés, et donc pour $\{a, b\}$ les solutions $\{18, 360\}, \{72, 90\}$ ainsi que leurs opposés.

10. (Exercice 6.18) On veut résoudre

$$a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \begin{cases} a + b = 51 \\ a \vee b = 216. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Décomposer 51, 72 et 216 en produits de facteurs premiers.

Solution: $51 = 3 \times 17$, $72 = 2^3 \times 3^2$ et $216 = 2^3 \times 3^3$.

(b) Quel est le pgcd de 51 et 216 ?

Solution: 3

(c) Déterminer toutes les décompositions de 72 et 216 en produits d'entiers naturels premiers entre eux.

Solution: $72 = 1 \times 72 = 8 \times 9$ et $216 = 1 \times 216 = 8 \times 27$.

(d) Montrer que si a et b sont solutions du système (1), alors leur pgcd divise celui de 51 et 216.

Solution: Si un entier d divise a et b, alors d divise $a + b = 51$ et d divise $a \vee b = 216$. Il divise donc leur pgcd (c'est à dire 3).

(e) Conclure.

Solution: On a soit $a \wedge b = 1$ soit $a \wedge b = 3$. Si $a \wedge b = 1$, alors la seconde équation du système a pour solutions $\{1, 216\}$ et $\{8, 27\}$ qui ne sont pas solutions de la première. Supposons maintenant que $a \wedge b = 3$. On peut alors écrire $a = 3a'$ et $b = 3b'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et le système devient

$$a', b' \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \begin{cases} a' + b' = 17 \\ a'b' = 72. \end{cases}$$

On connait les solutions $\{1, 72\}$ et $\{8, 9\}$ de la seconde équation et on voit que seul $\{8, 9\}$ satisfait la première. En multipliant par 3, on trouve donc $\{a, b\} = \{24, 27\}$.

11. (Exercice 6.19) Les nombres 111, 1111, 11111 (persévérer), 111111 sont ils premiers ?

Solution: Ils ne sont pas premiers. On a $1+1+1=3$ donc 111 est divisible par 3. On a $1-1+1-1=0$ donc 1111 est divisible par 11. On a $11111 = 41 \times 271$ (essayer tous les nombres premiers dans l'ordre). On a $1-1+1-1+1-1=0$ donc 111111 est divisible par 11.

12. (Exercice 6.21)

    (a) Montrer que si p premier divise à la fois $a+b$ et ab, alors p divise nécessairement a et b.

    Solution: Si p est premier et divise ab, alors il divise nécessairement a ou b. Supposons qu'il divise a. S'il divise aussi $a+b$, alors il divise leur différence $b = (a+b) - a$. Sinon, il divise b et on conclut de la même manière.

    (b) En déduire que si a et b sont premiers entre eux, alors $a+b$ et ab sont aussi premiers entre eux.

    Solution: Par l'absurde. Si $a+b$ et ab n'étaient pas premiers entre eux, on pourrait trouver un entier $p > 1$ qui les divise tous les deux. Quitte à prendre le plus petit, on peut supposer p premier. Et p diviserait alors a et b. Contradiction.