Exercice 6.1

Éléments de correction. — on trouve les couples (quotient,reste) suivants : $(990,11)$, $(59696,9)$ $(5094,5)$

Exercice 6.2

Indication. — On se rappellera bien la condition que le reste d'une division euclidienne est positif et strictement majoré par la valeur absolue du diviseur

Éléments de correction. — Puisque $12079233 = 75968 \times 159 + 321$ et que $0 \leqslant 321 < 75968$, le reste de la division par 75968 est 321.

En outre

$$12079233 = 75968 \times 159 + 321 = 75968 \times 159 + 2 \times 159 + 3 = (75968 + 2) \times 159 + 3$$

donc le reste de la division par 159 est 3

Exercice 6.3

Indication. — Calculer les puissances de 3 modulo 7. À quoi est égal 38 modulo 7 ?

Éléments de correction. — $3^0 = 1 \pmod 7$, $3^1 = 3 \pmod 7$, $3^2 = 9 \pmod 7$ soit $3^2 = 2 \pmod 7$,

$3^3 = 2 \times 3 \pmod 7$ soit $3^3 = 6 \pmod 7$
$3^4 = 6 \times 3 \pmod 7$ soit $3^4 = 4 \pmod 7$
$3^5 = 4 \times 3 \pmod 7$ soit $3^5 = 5 \pmod 7$
$3^6 = 5 \times 3 \pmod 7$ soit $3^6 = 1 \pmod 7$

Ces calculs montrent notamment que tous les restes de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ peuvent intervenir. En termes plus formels, soit f l'application qui à $n \in \mathbf{N}$ associe le reste de la division euclidienne de 3^n par 7. Alors ces calculs montrent que tout élément de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ possède un antécédent par f. La question qui reste a priori en suspens est de savoir si 0 est ou non "atteint" par f. On va montrer que ce n'est pas le cas (en d'autres termes, que f induit une application surjective de $\mathbf{N}$ sur $\{1,2,3,4,5,6\}$).

Une façon de procéder est, prenant un entier naturel n quelconque, d'écrire la division euclidienne de n par 6, soit $n = 6 \cdot q + r$ avec $q \in \mathbf{N}$ et $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Alors $3^n = (3^6)^q \cdot 3^r$ d'où $3^n = (3^6)^q \cdot 3^r \pmod 7$ d'où $3^n = 1^q \cdot 3^r \pmod 7$ d'où $3^n = 3^r \pmod 7$. Or on connaît les valeurs de $3^r \pmod 7$ pour $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ et aucune n'est égale à 0 modulo 7. Donc 3^n n'est pas égal à 0 modulo 7.

Une autre possibilité est de montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 7 ne divise pas 3^n, en utilisant le lemme d'Euclide et le fait que 7 est premier.

Comme $38 = 3 \pmod 7$, toutes les congruences ci-dessus sont encore valables en remplaçant les puissances de 3 par des puissances de 38, et on aboutit à la même conclusion

Exercice 6.4

Indication. — Commencer par regarder pour de petites valeurs de n pour se faire une idée On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

Éléments de correction. — Pour le 1. (les autres sont similaires), on devine que 7 divise $4^n + 2^n + 1$ si et seulement si 3 ne divise pas n. Montrons le. Comme 7 est premier, on a (Fermat) $4^6 = 1 \pmod 7$ et $2^6 = 1 \pmod 7$. Soit n un entier naturel quelconque et $n = 6{\cdot}q+r$ la division euclidienne de n par 6. On a $4^n + 2^n + 1 = (4^6)^n \cdot 4^r + (2^6)^n \cdot 2^r + 1$ d'où

$$4^n + 2^n + 1 = 1^n \cdot 4^r + 1^n \cdot 2^r + 1 \pmod 7$$

soit

$$4^n + 2^n + 1 = 4^r + 2^r + 1 \pmod 7$$

Il suffit donc d'examiner si $4^r + 2^r + 1$ est divisible par 7 pour $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et on trouve que c'est le cas si et seulement si $r \in \{1, 2, 4, 5\}$.

Exercice 6.5

Indication. — Commencer par réduire 247 modulo 7, puis calcul de puissances modulaire en s'aidant ou non du petit théorème de Fermat

Éléments de correction. — On a $247 = 35 \times 7 + 2$ donc $247 = 2 \pmod 7$ d'où $247^{349} = 2^{349} \pmod 7$ D'après Fermat, $2^6 = 1 \pmod 7$; la division euclidienne de 349 par 6 s'écrit $349 = 6 \times 58 + 1$. Donc $2^{349} = 2^1 \pmod 7$ donc le reste cherché est 2 (car 0≤ 2<7$)

Exercice 6.6

Indication. — Comme toujours, on pourra commencer si nécessaire par se faire une idée sur de petites valeurs de n. On pourra aussi se rappeler que $7 = -1 \pmod 8$

Éléments de correction. — Comme $7 = -1 \pmod 8$, pour tout entier naturel n on a $7^n + 1 = (-1)^n + 1 \pmod 8$ or $(-1)^n + 1$ vaut 0 si n est impair et 2 si n est pair.

AG1