- *Peut-on avoir des exercices sur les angles ?* Cette feuille de TD d'une ancienne version d'AG1 en contient quelques uns (mais moins que dans mon souvenir, et la quasi totalité s'appuient sur le concept de rotation et de l'écriture de telles transformations en termes de nombre complexes, qui n'a pas été vue cette année) Voir cependant au moins l'exercice 6. Si le temps me le permet, je vous en trouverai d'autres.
- *Pourquoi le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime en fonction du cosinus de l'angle des deux vecteurs ?* Voici une présentation de l'interprétation géométrique du produit scalaire (sans les dessins pour l'instant). Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Si l'un des deux est le vecteur nul, le produit scalaire est également nul. On suppose désormais qu'ils sont non nuls tous les deux. On peut donc considérer la projection orthogonale p sur la droite vectorielle définie par $\overrightarrow{u}$. En particulier les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $p(\overrightarrow{v})$ sont colinéaires. De deux choses l'une : soit ils ont le même sens ; dans ce cas on a
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|\cdot\left|\left|p(\overrightarrow{v})\right|\right|$$
Soit ils sont de sens opposé ; dans ce cas on a
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|\cdot\left|\left|p(\overrightarrow{v})\right|\right|$$
Ces formules permettent de retrouver aussitôt que
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{sont orthogonaux}$$
En effet, comme $\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right| \neq 0$, on voit sur les formules ci-dessus qu'on a
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \left|\left|p(\overrightarrow{v})\right|\right| = 0 \Leftrightarrow p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$$
Et les vecteurs dont l'image par la projection orthogonale sur la droite vectorielle définie par $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{0}$ sont exactement les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$

  Au lieu de projeter $\overrightarrow{v}$ sur la droite définie par $\overrightarrow{u}$, peut-on projeter $\overrightarrow{u}$ sur la droite définie par $\overrightarrow{v}$? Oui, et même si ça n'est pas limpide géométriquement, on obtiendra bien le même résultat.

  Passons à l'interprétation en termes d'angles. Posons $\overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{u}}{\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|}$ et $\overrightarrow{v'} = \frac{\overrightarrow{v}}{\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|}$ On vérifie que $\left|\left|\overrightarrow{u'}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{v'}\right|\right| = 1$. Par définition $\overrightarrow{u'}$ est un multiple positif de $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{v'}$ est un multiple positif de $\overrightarrow{u}$ En particulier l'angle θ entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le même que l'angle entre $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$. Par ailleurs
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|\overrightarrow{u'})\cdot(\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|\overrightarrow{v'}) = \left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}$$
On va interpréter géométriquement $\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}$ en termes d'angle en utilisant la description géométrique du produit scalaire. Les extrémités de $\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}$ sont sur le cercle trigonométrique. Soit donc θ l'angle entre ces deux vecteurs. Si $\overrightarrow{u'} = (1,0)$, on sait que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v'}$ sur la droite définie par $\overrightarrow{u'}$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, a pour abscisse $\cos(\theta)$. D'après la description géométrique ci-dessus, et compte tenu du fait que $\left|\left|\overrightarrow{u'}\right|\right| = 1$, on a donc
$$\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'} = \cos(\theta)$$

Si l'extrémité de $\overrightarrow{u'}$ est une extrémité quelconque du cercle trigonométrique, cette égalité est encore vraie : par une rotation adéquate ρ, on amène $\overrightarrow{u'}$ en $(1,0)$. L'angle entre $(1,0)$ et $\rho(\overrightarrow{v'})$ est toujours θ, et par ailleurs l'image par ρ du projeté orthogonal de $\overrightarrow{v'}$ sur la droite définie par $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\rho(\overrightarrow{v'})$ sur $(1,0)$. Donc

$$\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{v'} = (1,0) \cdot \rho(\overrightarrow{v'}) = \cos(\theta)$$

Finalement,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}|| \, \overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{v'} = ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}|| \cos(\theta)$$

Ceci explique la motivation géométrique de la formule vue dans le cours d'AG1.

– *Mr Le Stum nous parle souvent d'espace vectoriel. Pourquoi ?* Parce que la "structure" d'espace vectoriel est une structure qui apparaît fréquemment dans de multiples situations mathématiques, que ce soit en mathématiques dites pures ou dans toutes les modélisations mathématiques et outils mathématiques mobilisés lors des applications. Autrement dit, il y a une foultitude de telles situations où l'on rencontre des objets qui se comportent un peu comme les vecteurs du plan : on peut les ajouter et les multiplier par un réel, et les règles de calcul vis à vis de ces opérations sont les mêmes que pour les vecteurs du plan. Un des intérêt d'identifier une structure commune d'espace vectoriel à toutes ces situations, c'est qu'on peut développer une fois pour toute la théorie et les outils de la structure "abstraite" d'espace vectoriel pour les appliquer ensuite directement à toutes ces situations (au lieu d'avoir à tout refaire à chaque fois). En AG2 vous verrez le début de la théorie générale des espaces vectoriels, autrement dit de l'algèbre linéaire. Vous verrez aussi le début de la théorie d'une autre structure elle aussi très fréquemment identifiée dans de multiples situations : la structure de groupe.
– *Comment calcule-t-on l'équation d'une droite dans l'espace ?* À retenir pour l'instant : l'équation (cartésienne) d'une droite dans l'espace, c'est plus compliqué que dans le plan... déjà parce qu'une droite dans l'espace ne peut pas être définie par une seule équation. Vous verrez ça normalement en AG2 (à vérifier car initialement il était bien prévu dans le programme de le faire en AG1 mais les programmes sont assez lourds par ailleurs) Le passage de la dimension 2 à la dimension 3 est déjà un peu plus facile en ce qui concerne les équations *paramétriques* de droites (qui sont je pense évoquées dans le programme de terminale S) à titre d'exemple, la droite $\mathscr{D}$ passant par le point de coordonnées $(1,2,-3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-2,3,7)$ peut se décrire comme

$$\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 - 2 \cdot t \\ y & = & 2 + 3 \cdot t \\ z & = & -3 + 7 \cdot t \end{array} \right. \}$$

On peut en tirer une famille d'équations cartésiennes définissant $\mathscr{D}$ en écrivant par exemple

$$\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^2, \quad \exists t \in \mathbf{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcr} t & = & \frac{x-1}{2} \\ y & = & 2 + 3 \cdot t \\ z & = & -3 + 7 \cdot t \end{array} \right. \}$$

d'où on tire (vérifiez bien la logique du raisonnement)

$$\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 2 + 3 \cdot \frac{x-1}{2} \\ z & = & -3 + 7 \cdot \frac{x-1}{2} \end{array} \right. \}$$

- *Si on a deux fois le même point qui intervient dans un barycentre, par exemple* $\mathrm{Bar}((P, 1), \dots, (P, -2), \dots)$ *peut on remplacer les points pondérés correspondant par un seul point pondéré (en gardant le même point et en prenant la somme des poids) ?* La réponse est oui (même si la somme des poids est nulle, dans ce cas le point disparaît) ; on l'a d'ailleurs déjà utilisé dans certains exercices ; je vous invite à essayer d'écrire la démonstration
- *Pour travailler avec l'inverse d'un nombre complexe, faut-il toujours l'écrire sous forme exponentielle ?* Certainement pas en général ; tout dépend du contexte. Dans les exercices 2 et 3 du CC2, par exemple, ça n'était pas nécessaire; par contre il était important de connaître les propriétés
$$\forall z, z' \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \ \frac{1}{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = z', \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \ \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$
- *Peut-on revenir sur l'exercice 2 du CC ? (injectivité, surjectivité)* Suite à un retour plus détaillé, je change au moins provisoirement la question en la question suivante, que je vous invite à méditer

  Pour montrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie, on suppose que A est vraie et on montre qu'alors B est vraie ; pourquoi ne s'intéresse-t-on jamais au cas où A est fausse ?
- *Vis à vis de l'exercice 5.8, P et Q sont des constantes ou varient ?* Ce sont bel et bien des constantes, même si P et Q sont choisis arbitrairement. On pourrait imaginer une situation similaire à l'exercice 5.8 où P et Q varient également. Par exemple (en notant $\mathscr{P}$ le plan) déterminer si l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P} \times \mathscr{P} \times \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbf{R}_{\geqslant 0} \\ (P, Q, M) & \longmapsto & MP^2 + MQ^2 \end{array}$$
  admet un minimum et lequel. Contrairement aux apparences, cette question est en fait *plus simple* que la question analogue de l'exercice 5.8
- *Peut-on revenir sur la correction de la question 4 de l'exercice 5.11 ?* Suite à un retour plus détaillé, j'ai mis un peu à jour les éléments de correction proposés
- *Les puissances sont-elles toujours cycliques vis à vis des congruences ?* À voir en TD d'arithmétique ; on a vu que la réponse était oui quand on considérait les puissances modulo un nombre premier d'un entier non divisible par ce nombre premier, grâce au petit théorème de Fermat
- *Peut on revenir sur l'algorithme d'Euclide ?* À voir en TD d'arithmétique