exercices 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 + 5.5

Exercice 5.1.1

Indication. — On pourra calculer $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2$ en utilisant $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

Éléments de correction. —

$$\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2+2\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR}$$

or $\left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2=QR^2=6^2$ etc ; en outre $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(-\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{PR}=-\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{PR}$.

Exercice 5.1.2

Indication. — On pourra calculer $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}$ en utilisant la question précédente, en déduire PH puis RH

Éléments de correction. — Par définition de H, on a $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{HR}=0$, donc

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{HR}$$

soit

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HR})=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$$

Comme P,Q,H sont alignés, on a $PQ\cdot PH=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}\right|$ or on connaît PQ

Exercice 5.2

Indication. — Caractériser le fait qu'un point M du plan soit sur la hauteur en termes de produit scalaire

Éléments de correction. — soit M un point du plan ; alors M est sur la hauteur issue de P si et seulement si $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QR}=0$. Or en notant $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ les coordonnées de M, on peut calculer $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QR}$ en fonction de x et y compte tenu des données numériques de l'énoncé, ce qui donne l'équation cherchée.

Exercice 5.3

Indication. — On pourra utiliser l'identité $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$ et on n'oubliera pas de traduire vectoriellement le fait que (P,Q,R,S) est un parallélogramme

Éléments de correction. — Pour 5.3.1, prendre $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QS}$; comme (P,Q,R,S) est un parallélogramme, $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=2\overrightarrow{PS}$

Pour 5.3.2, se rappeler que (PR) et (QS) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=0$

Pour 5.3.3, prendre $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{QR}$; comme (P,Q,R,S) est un parallélogramme, $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SQ}$

Exercice 5.4.1

Indication. — On pourra utiliser $||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Exercice 5.4.2

Indication. — Ajouter les deux égalités et simplifier

Éléments de correction. — quand on ajoute, les produits scalaires se simplifient car comme (P, Q, R, S) est un parallélogrammen on a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = -\overrightarrow{RS}$; ce qui reste donne la relation annoncée

Exercice 5.5.1

Indication. — Calculer le produit scalaire en intercalant le point O (Chasles)

Éléments de correction. —

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OH}) \cdot (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}) = (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \cdot (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR})$$

et on peut appliquer $||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$; comme O est le centre du cercle circonscrit, $OQ^2 = OR^2$

On en déduit que les droites (PH) et (QR) sont perpendiculaires ; en permutant les rôles de P, Q, R, on en déduit que (RH) et (PQ) sont perpendiculaires et que que (RH) et (PQ) sont perpendiculaires (attention aux possibles cas dégénérés $P = H$, etc..)

Exercice 5.5.2

Indication. — immédiat avec une formule du cours sur le barycentre

Éléments de correction. — exprimer $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$ en utilisant le fait que G est l'isobarycentre de (P, Q, R) ; la formule demandée en découle

---