Feuille n° 4 : géométrie

1 Produit scalaire

Exercice 1

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme non aplati du plan euclidien $\mathcal{P}$.

1. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :
$$AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$$
2. Montrer que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires si et seulement si $AC = BD$.
3. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :
$$AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
4. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si $AB = BC$.

Exercice 2

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme du plan euclidien $\mathcal{P}$.

1. Montrer que
$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad CD^2 + DA^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$$
2. Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Exercice 3

Soient A, B deux points distincts du plan euclidien $\mathcal{P}$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{P}, \qquad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
2. Montrer que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $M \mapsto MA^2+MB^2$ admet un minimum atteint en un unique point que l'on explicitera.

Exercice 4

Soit A, B deux points du plan euclidien $\mathcal{P}$. On pose $\mathcal{C} := \{M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}\}$. Soit I le milieu de $[A, B]$. Montrer que l'on a
$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$
En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5

Soit A, B deux points distincts du plan euclidien $\mathcal{P}$. On pose : $\mathcal{C} := \{M \in \mathcal{P}, \quad MA = \frac{1}{3}MB\}$. Soit I et J les points de $\mathcal{P}$ définis par
$$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$$
Montrer que :
$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad MA^2 - \frac{1}{9}MB^2 = \frac{8}{9}\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$$
En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6

Soit A, B et C trois points du plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On suppose $A \neq B$ et $A \neq C$.

1. Montrer que $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\left|\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$, où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ désigne l'angle géométrique défini par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que si le triangle (ABC) est équilatéral alors $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sqrt{3}$.
3. On suppose le triangle (ABC) équilatéral. On suppose que les coordonnées de A,B et C dans $\mathcal{R}$ sont toutes rationnelles. Montrer qu'alors $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Montrer par ailleurs que $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$. Conclure.

Exercice 7

Soient P, Q, R trois points du plan euclidien $\mathcal{P}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a
$$(\overrightarrow{QP} + \lambda\overrightarrow{QR})^2 = \overrightarrow{QP}^2 + 2\lambda\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} + \lambda^2\overrightarrow{QR}^2.$$
2. En considérant le discriminant du polynôme (en la variable λ) de droite dans l'égalité précédente, montrer que
$$\left|\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR}\right| \leq QP\ QR.$$
3. Montrer que
$$\overrightarrow{PR}^2 = \overrightarrow{QP}^2 - 2\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2.$$
4. En déduire que
$$PR \leq PQ + QR.$$
5. Montrer que $PR = PQ + QR$ si et seulement si $Q \in [PR]$.
6. On considère maintenant quatre points P, Q, R et S. Montrer que
$$PS \leq PQ + QR + RS$$
et caractériser les configurations de quatre points P, Q, R et S qui vérifient l'égalité $PS = PQ + QR + RS$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{P}$ le plan et $\mathcal{R} = (o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de $\mathcal{P}$. On considère l'application
$$\varphi : ((x,y)_{\vec{\mathcal{R}}}, (x',y')_{\vec{\mathcal{R}}}) \mapsto xx' + 3yy'.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Déterminer un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de $\mathcal{P}$ qui soit orthonormé pour ce produit scalaire.
3. Soit X, Y, X' et Y' des réels. Calculer $\varphi(X\vec{I} + Y\vec{J}, X'\vec{I} + Y'\vec{J})$.

2 Barycentres

Exercice 9

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. Construire, s'il existe, le barycentre G des points pondérés suivants :

1. $(A, 1)$ et $(B, 3)$

2. $(A, 2)$ et $(B, 2)$
3. $(A, -1)$ et $(B, 2)$
4. $(A, -2)$ et $(B, -6)$
5. $(A, -2)$ et $(B, 2)$

Exercice 10

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A := (1, 1)_{\mathcal{R}}$ et $B := (5, 3)_{\mathcal{R}}$.

1. Faire une figure, que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{R}$
   (a) du barycentre G_1 de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ (s'il existe).
   (b) du barycentre G_2 de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(O, 3)$ (s'il existe).
3. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que $H = (-1, 0)$ soit le barycentre de (A, a) et (B, b). Donner une interprétation du résultat obtenu.
4. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que O soit le barycentre de (A, a) et (B, b). Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Existe-t-il un point C tel que O soit le centre de gravité du triangle ABC ? Si oui, en déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$.

Exercice 11

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan $\mathcal{P}$. Soit K le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$, soit J le milieu du segment $[CD]$, soit G le centre de gravité du triangle BCD, et soit I le milieu du segment $[AG]$. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

Exercice 12

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan $\mathcal{P}$. Notons I le barycentre de $(A, 2), (B, 1)$ et J le barycentre de $(B, 1), (C, -2)$.

1. Faire une figure.
2. Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, -2)$. Justifier que les points A, J et G sont alignés, et que les points C, I et G sont alignés. En déduire la position du point G, et le placer sur la figure.
3. Montrer que les droites (BG) et (AC) sont parallèles.

Exercice 13

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, soit P le symétrique de A par rapport à C, soit Q le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, et R le milieu de $[AB]$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 14

Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan $\mathcal{P}$ (on suppose A, B, C et D deux à deux distincts). Soit K le milieu de $[AD]$ et L le milieu de $[BC]$. Soit J le point du plan défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer K comme barycentre de A et D affectés de poids convenables. Exprimer J comme barycentre de A et B affectés de poids convenables.
3. Justifier que les droites (DJ) et (BK) s'intersectent en un unique point G, que l'on exprimera comme barycentre des points A, B et D affectés de poids convenables.
4. Montrer que les droites (DJ), (BK) et (AL) sont concourantes.

Exercice 15

On considère un triangle ABC et deux réels λ et μ tels que $\lambda+\mu \neq 0$. On note A' le barycentre de $\{(B,\lambda),(C,\mu)\}$, B' le barycentre de $\{(C,\lambda),(A,\mu)\}$, C' le barycentre de $\{(A,\lambda),(B,\mu)\}$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 16

Soit A, B et C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Soit a, b et c des réels tels que $a+b+c \neq 0$ et soit M le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).

1. On suppose que $b+c=0$. Montrer que (AM) et (BC) sont parallèles.
2. On suppose que (AM) et (BC) sont sécantes ; on note L leur point d'intersection. Montrer que L est le barycentre de (B,b) et (C,c).

Exercice 17

Soit A, B et C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Soit A' le milieu de $[BC]$ et D celui de $[AA']$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Le but de l'exercice est de déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DA'}$.
2. En déduire que D est le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.
3. En déduire à l'aide de l'exercice précédent que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 18

1. Démontrer à l'aide de barycentre que les médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.
2. Démontrer que si $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace $\mathcal{R}$, les trois droites qui relient les milieux de deux côtés non sécants sont sécantes.

Exercice 19

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Montrer que les milieux des côtés de ce quadrilatère forment un parallélogramme (théorème de Varignon).

Exercice 20

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$ et G son centre de gravité. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 21

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des réels m tels que le barycentre G_m du système pondéré $\{(A,1),(B,m),(C,-1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points G_m lorsque m décrit $\mathcal{A}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}'$ des réels m tels que le barycentre H_m du système pondéré $\{(A,1),(B,m),(C,1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points H_m lorsque m décrit $\mathcal{A}'$.

Exercice 22

Soit (ABC) un triangle du plan $\mathcal{P}$. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC), G l'isobarycentre de A, B et C et H le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
2. En déduire que H est l'orthocentre du triangle (ABC).
3. Montrer que O, G et H sont alignés.

Exercice 23

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. On note G le barycentre de $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$.

1. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2GA^2 + GB^2 - GC^2 + 2MG^2.$$

2. Montrer qu'il existe un unique point K de $\mathcal{P}$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{P} \setminus \{K\}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 > 2KA^2 + KB^2 - KC^2.$$

Exercice 24

Soit A, B et C trois points du plan euclidien $\mathcal{P}$. Déterminer et construire

1. l'ensemble X_1 des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| \leqslant 2.$$

2. l'ensemble X_2 des points M du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

3. l'ensemble X_3 des points N du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Exercice 25

Soit A, B et C trois points du plan euclidien $\mathcal{P}$. En quel(s) point(s) P du plan $\mathcal{P}$ est-ce que la quantité

$$\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\|$$

est minimale ?

Exercice 26

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'origine O. On considère les points de $\mathcal{P}$ suivants :

$$A := \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_{\mathcal{R}} \quad , \quad B := (0, -1)_{\mathcal{R}} \quad , \quad C := \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{R}} \quad .$$

Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On note Γ le cercle circonscrit à ABC.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.
3. Soit M un point sur Γ. On note $I(M)$ le barycentre de {(A,1),(B,1),(C,1),(M,3)}. Ainsi $I\colon M \mapsto I(M)$ définit une application de Γ dans le $\mathcal{P}$. Simplifier l'expression de $I(M)$ en terme d'un barycentre de seulement 2 points pondérés.
4. On note $A' = I(A)$, $B' = I(B)$ et $C' = I(C)$. Placer les points A', B' et C' sur le dessin.
5. Soit H le barycentre de $\{(G, 1), (O, 1)\}$

   Placer H sur le dessin. Soit $M \in \Gamma$. Exprimer $2\overrightarrow{HI(M)}$ en fonction de M et O. En déduire que $I(M)$ est sur un cercle de centre H et de rayon à déterminer.
6. Montrer que $I(\Gamma)$ est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

3 Transformations du plan, application des nombres complexes à la géométrie

Dans tous les exercices de cette section, $\mathcal{P}$ désigne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé ; on dispose en particulier une application bijective « affixe » $\mathcal{P} \to \mathbf{C}$ au moyen de laquelle on peut si nécessaire identifier $\mathcal{P}$ et $\mathbf{C}$.

Exercice 27

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des similitudes de $\mathcal{P}$ suivantes (les points et vecteurs seront décrits par leurs affixes, les droites par une équation cartésienne)

1. $z \mapsto (1+i)z + (3-i)$
2. $z \mapsto (3+\sqrt{3}i)z + (1-i)$
3. $z \mapsto i\bar{z}$
4. $z \mapsto i\bar{z} + (1-i)$

Exercice 28

Pour tout nombre complexe u, on note f_u la similitude de $\mathcal{P}$ décrite par $z \mapsto u^2 z + u - 1$.

1. Déterminer l'ensemble des $u \in \mathbf{C}$ tels que f_u est une translation (respectivement une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, respectivement une homothétie de rapport -2). Pour tout élément u de l'ensemble en question, donner les éléments caractéristiques de f_u.
2. On suppose que $u = 1 - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_u.

Exercice 29

Soit A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c. On suppose que $|a| = |b| = |c|$.

1. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Montrer que $\bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur.
3. Montrer que $(b+c)(\bar{b}+\bar{c}$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.
4. Soit H le point d'affixe $a+b+c$. Montrer qu'on a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$.
5. Qui est H ?

Exercice 30

Soit A, B C et D quatre points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d, avec $A \neq B$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, b, c et d, pour qu'il existe une rotation qui envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[CD]$? Comment alors construire le centre de la rotation ?

Exercice 31

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une similitude.

1. Montrer que l'image d'une droite de $\mathcal{P}$ par f est une droite.
2. Montrer que l'image par f d'un segment de $\mathcal{P}$ non réduit à un point est un segment de $\mathcal{P}$ non réduit à un point. Montrer que l'image par f du milieu d'un segment de $\mathcal{P}$ est le milieu de l'image par f de ce segment.
3. Montrer que l'image par f d'un triangle non aplati de $\mathcal{P}$ est un triangle non aplati. Montrer que l'image par f de l'isobarycentre d'un triangle de $\mathcal{P}$ est l'isobarycentre de l'image par f de ce triangle.

Exercice 32

Quelles sont les homothéties de $\mathcal{P}$ qui sont des isométries ? On les décrira par leurs éléments caractéristiques.

Exercice 33

1. Soit $k \in \mathbf{R}^*$ et $h \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une homothétie de $\mathcal{P}$ de rapport k. Soit r un réel strictement positif. Montrer que l'image d'un cercle de centre r est un cercle de rayon $|k|r$
2. Soit O et O' des points de $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O' et de rayon 2. Déterminer toutes les homothéties h telles que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$; on donnera en particulier les éléments caractéristiques de ces homothéties.

Exercice 34

Soit O_1 et O_2 des points de $\mathcal{P}$, k_1 et k_2 deux réels non nuls, h_1 l'homothétie de centre O_1 et de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O_2 et de rapport k_2.

1. On suppose $k_1k_2 \neq 1$. Montrer que $g := h_2 \circ h_1$ est une homothétie ; exprimer le rapport de g en fonction de k_1 et k_2 et le centre de g comme un barycentre de O_1 et O_2 affectés de poids que l'on exprimera également en fonciton de k_1 et k_2.
2. On suppose $k_1k_2 = 1$. Montrer que $h_2 \circ h_1$ est une translation, donc on exprimera le vecteur en fonction de k_2 et du vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Exercice 35

Soit O un point du plan affine $\mathcal{P}$, k un réel non nul et différent de 1, $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, h l'homothétie de centre O et de rapport k et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

1. Montrer que $g_1 := h \circ t$ est une homothétie ; on exprimera le rapport de g_1 en fonction de k et si I_1 est le centre de g_1, on exprimera $\overrightarrow{I_1O}$ en fonction de k et $\overrightarrow{u}$.
2. Montrer que $g_2 := t \circ h$ est une homothétie ; on exprimera le rapport de g en fonction de k et si I_2 est le centre de g_2, on exprimera $\overrightarrow{I_2O}$ en fonction de k et $\overrightarrow{u}$.

Exercice 36

Soit ABC un triangle de $\mathcal{P}$. On note s_A, s_B, s_C les symétries centrales par rapport à A, B, C respectivement. Décrire l'isométrie $s_A \circ s_B \circ s_C$ (nature, éléments caractéristiques).

Exercice 37

Soient r_a et r_b deux rotations non triviales de $\mathcal{P}$ d'angles respectifs θ_a et θ_b. Montrer que $r_a \circ r_b = r_b \circ r_a$ si et seulement si r_a et r_b ont même centre.

Exercice 38

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et σ la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$. À quelle condition a-t-on $\sigma \circ t = t \circ \sigma$?

Exercice 39

1. Montrer que le produit de deux rotations de $\mathcal{P}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une symétrie centrale.
2. Déterminer le centre de cette symétrie centrale ; on l'exprimera en fonctions des centres des rotations considérées.

Exercice 40

Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites du plan $\mathcal{P}$. On note $\sigma_{\mathcal{D}}$, $\sigma_{\mathcal{D}'}$ les réflexions par rapport aux droites $\mathcal{D}$ et d'.

1. Montrer que si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ alors $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_d$ est une translation ; déterminer le vecteur de cette rotation.
2. On suppose que $\mathcal{D}$ et d' sont sécantes. Soit Ω leur point d'intersection. Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est une rotation de centre Ω. Déterminer l'angle de cette rotation en fonction de l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Exercice 41

Montrer que toute rotation et toute translation est le produit de plusieurs couples de réflexions.

Exercice 42

Soient r_1, r_2 deux rotations de $\mathcal{P}$ d'angles θ_1, θ_2 respectivement. Montrer que :

1. Si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad [2\pi]$ alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.
2. Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \quad [2\pi]$ alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation.

Exercice 43

Soient B et C deux points distincts de $\mathcal{P}$. On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On note s la composée $r_C \circ t \circ r_B$.

1. Quelle est la nature de s ?
2. Quelle est l'image de B par s ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de s ?

Exercice 44

1. Montrer que l'image d'un cercle par une isométrie de $\mathcal{P}$ est un cercle de même rayon.
2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de même rayon. Déterminer toutes les isométries qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. (on donnera leurs éléments caractéristique en fonction des centres et des rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 45

Soient A et B deux points distincts de P. On note r_A et r_B les rotations de centre A et B, et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit f la transformation $r_B \circ r_A^{-1}$.

1. Construire $C = f(A)$.
2. Quelle est la nature de f ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de f ?
4. Soit M un point du plan. Quelle est la nature du quadrilatère $r_A(M)r_B(M)CA$?
5. Quel est le lieu géométrique du point $r_B(M)$ lorsque le point M parcourt le cercle Γ de diamètre $[AB]$?
6. Déterminer le lieu géométrique du milieu du segement $[r_A(M)r_B(M)]$ lorsque le point M parcourt le cercle Γ.

4 Équations de droites dans le plan, équations de droites et de plans dans l'espace, distance d'un point à une droite et à un plan

Exercice 46

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit $A := (1,3)_{\mathcal{R}}$ et $B := (-3,-1)_{\mathcal{R}}$.

1. Calculer la distance de A puis de B à la droite $\mathcal{D}$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $3x - y - 6 = 0$
2. Même question avec $A := (1,3)_{\mathcal{R}}$ et $B := (3,-2)_{\mathcal{R}}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $x + 2y - 2 = 0$.

Exercice 47

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Calculer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque :

1. $M := (4,2)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $4x + 3y = 7$.
2. $M := (1,-1)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{D}$ est la droite dirigée par le vecteur $(1,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et passant par le point $(4,5)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 48

L'espace euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

1. Calculer la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ lorsque :
   (a) $M := (1,2,3)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $x+2y+2z=-1$.
   (b) $M := (1,0,2)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{P}$ est le plan dirigé par les vecteurs $(1,0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et $(2,2,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$, et passant par le point $(4,0,5)$.
2. Calculer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque :
   (a) $M := (3,4,0)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{D}$ admet pour système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} 2x+3y+z &= 5 \\ 3x+y &= 7 \end{cases}$
   (b) $M := (1,-1,0)_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{D}$ est la droite dirigée par le vecteur $(1,1,2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et passant par le point $(4,0,5)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 49

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. Soit $M := (1,0)_{\mathcal{R}}$, $A := (-2,1)_{\mathcal{R}}$ et $B := (5,10)_{\mathcal{R}}$. Le point M appartient-il à la droite (AB) ?
2. Soit m un réel, $C_m := (2,m)_{\mathcal{R}}$, $A := (1,0)_{\mathcal{R}}$ et $B = (-1,4)_{\mathcal{R}}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que le point C_m appartient à la droite (AB).

Exercice 50

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ des droites suivantes :
$$\left\{(-1,0)_{\mathcal{R}} + t(1,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}, \quad t \in \mathbf{R}\right\}, \quad \left\{(1,1)_{\mathcal{R}} + t(0,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}, \quad t \in \mathbf{R}\right\}.$$
2. Donner une description paramétrique de la droite d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$:
$$x+2y=4.$$

Exercice 51

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. On considère les points suivants de $\mathcal{P}$:
$$A := (1,1)_{\mathcal{R}}, \quad B := (2,2)_{\mathcal{R}}; \quad C := (5,-1)_{\mathcal{R}}, \quad D := (2,0)_{\mathcal{R}}.$$
Déterminer des équation cartésiennes dans $\mathcal{R}$ des droites (AB) et (CD) et déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de leur intersection.
2. Soit $m \in \mathbf{R}$; on considère les points suivants de $\mathcal{P}$:
$$A' := (2,0)_{\mathcal{R}}, \quad B' := (3,4)_{\mathcal{R}}; \quad C' := (2,2)_{\mathcal{R}}, \quad D'_m := (3,m)_{\mathcal{R}}.$$
Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles les droites $(A'B')$ et $(C'D'_m)$ ont une intersection non vide.

Exercice 52

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si A, B et C sont alignés et dans l'affirmative déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ de la droite qui les contient.

1. $A := (-3,3)_{\mathcal{R}}, B := (5,2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2,1)_{\mathcal{R}}$
2. $A := (1,1)_{\mathcal{R}}, B := (-2,2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2,1)_{\mathcal{R}}$

3. $A := (4,-3)_{\mathcal{R}}, B := (0,-1)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2,-2)_{\mathcal{R}}$
4. $A := (2,-1)_{\mathcal{R}}, B := (1,-2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (-3,4)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 53

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer la nature et une description paramétrique de l'intersection des droites de $\mathcal{P}$ suivantes :
$$\left\{t\,(1,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{(-1,-4)_{\mathcal{R}}+t\,(1,2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}.$$
2. Même question avec les droites :
$$\left\{(1,1)_{\mathcal{R}}+t\,(0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{(1,3)_{\mathcal{R}}+t\,(0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}.$$
3. Même question avec les droites :
$$\left\{(1,1)_{\mathcal{R}}+t\,(0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{(1,2)_{\mathcal{R}}+t\,(0,2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}.$$

Exercice 54

L'espace euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

1. Déterminer la nature et une description paramétrique dans $\mathcal{R}$ des sous-ensembles de $\mathcal{E}$ décrits par les systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ suivants :
$$a)\left\{\begin{array}{ll}2\,x+3\,y+5\,z&=0\\x+y+z&=1\end{array}\right.\qquad b)\left\{\begin{array}{ll}3\,x-5\,y+z&=1\\x+y+z&=1\end{array}\right.$$
$$c)\left\{\begin{array}{ll}x-2\,y&=1\\x+2\,y+z&=1\end{array}\right.\qquad d)\left\{\begin{array}{ll}x+2\,y+z&=1\\2x+4\,y+2\,z&=2\end{array}\right.$$
$$e)\left\{\begin{array}{ll}x+y+2\,z&=1\\-x-3\,z&=1\\2\,x+2\,y+5\,z&=2\end{array}\right.\qquad f)\left\{\begin{array}{ll}x+y+2\,z&=1\\2\,x+3\,y+3\,z&=6\\-x+y-4\,z&=7.\end{array}\right.$$
$$g)\;x-3\,y+z=1\quad h)\;3\,x-y+z=1\quad i)\;5\,x-2\,y=1$$
Même question pour les intersections deux à deux de ces ensembles.
2. Calculer les produits vectoriels suivants :
$$(0,0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(-2,2,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (2,1,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}\wedge(0,1,2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
$$(1,0,-5)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}\wedge(0,1,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (1,0,-5)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}\wedge(2,0,-10)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
3. Déterminer la nature et un système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ des sous-ensembles de $\mathcal{E}$ suivants :
$$\left\{(1,0,0)_{\mathcal{R}}+t\,(1,0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\left\{(1,1,1)_{\mathcal{R}}+t\,(2,1,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\left\{(1,3,2)_{\mathcal{R}}+t\,(1,1,5)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\left\{(1,0,-1)_{\mathcal{R}}+t\,(-2,2,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\left\{(1,0,-1)_{\mathcal{R}}+t\,(0,0,0)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad t\in\mathbf{R}\right\}$$
$$\left\{(1,1,-1)_{\mathcal{R}}+t\,(0,0,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}+u\,(-2,2,1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (t,u)\in\mathbf{R}^2\right\}$$
$$\left\{(1,0,1)_{\mathcal{R}}+t\,(2,1,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}+u\,(0,1,2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (t,u)\in\mathbf{R}^2\right\}$$
$$\left\{(1,3,2)_{\mathcal{R}}+t\,(1,0,-5)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}+u\,(0,1,3)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (t,u)\in\mathbf{R}^2\right\}$$
$$\left\{(1,3,2)_{\mathcal{R}}+t\,(1,0,-5)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}+u\,(2,0,-10)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}},\quad (t,u)\in\mathbf{R}^2\right\}$$
Même question pour les intersections deux à deux de ces ensembles.

Exercice 55

L'espace euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit $m \in \mathbf{R}$. Soit $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $m^2\, x + (2m-1)\, y + m\, z = 3$. Donner une description simple de l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{E}, \quad \forall m \in \mathbf{R}, \quad M \in \mathcal{P}_m\}.$$