Complément : notion de sous-algèbre

Cette notion est très similaires à la notion de sous-anneau d'un anneau et jouit de propriétés élémentaires analogues. Elle ne figure pas dans le cours (en particulier n'est pas exigible lors des examens écrits) pour ne pas alourdir démesurément le chapitre 2, et également car elle intervient dans ce module uniquement dans l'exercice 3.15.

On donne juste la définition et quelques énoncés sans preuve. Les démonstrations ne sont *a priori* pas très difficiles (« Il suffit d'écrire »)

- Soit A un anneau et $\iota\colon A \to B$ une A-algèbre ; une *sous-A-algèbre de B* est un sous-anneau C de B tel que $\iota(A) \subset C$. Noter que cette dernière condition entraîne que ι induit par corestriction un morphisme d'anneaux $A \to C$, en d'autre termes une structure de A-algèbre sur C ; on munira systématiquement une sous-algèbre de cette structure induite. *Exemples* : B est une sous-A-algèbre de B ; $\iota(A)$ est une sous-A-algèbre de B.
- Soit A un anneau et $\iota\colon A \to B$ une A-algèbre ; soit $A \times B \to B$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ la loi de composition externe induite ; soit C un sous-anneau de B ; alors C est une sous-A-algèbre de B si et seulement si pour tout $a \in A$ et tout $c \in C$ on a $a \cdot c \in C$ si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $a \cdot 1_B \in C$.
- Soit A un anneau et $\iota\colon A \to B$ une A-algèbre. Une intersection quelconque de sous-A-algèbres de B est une sous-A-algèbre de B.
- Soit A un anneau, $A \to B$ une A-algèbre et $S \subset B$ une partie de B. Il existe une unique sous-A-algèbre de B contenant S et minimale (au sens de l'inclusion) pour cette condition. Elle est également minimum (au sens de l'inclusion) pour cette condition. On l'appelle la *sous-A-algèbre de B engendrée par S*.
- Soit A un anneau, $A \to B$ et $A \to C$ des A-algèbres et $\varphi\colon B \to C$ un morphisme de A-algèbres. Soit D une sous-A-algèbre de B. Alors $\varphi(D)$ est une sous-A-algèbre de C. En particulier $\varphi(B)$ est une sous A-algèbre de C.
- Soit A un anneau, $A \to B$ une A-algèbre et $b \in B$. Soit $\mathrm{ev}_b\colon A[X] \to B$ l'unique morphisme de A-algèbres qui envoie X sur b (*cf.* la définition 76 du chapitre 2). Alors la sous-A-algèbre de B engendrée par b est $\mathrm{ev}_b(A[X])$ et est notée $A[b]$ (*cf.* l'exercice 2.1). On a la description :

$$A[b] = \{\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \cdot b^i\}_{(a_i) \in A^{(\mathbf{N})}}.$$