Université de Rennes 1 Année universitaire 2019-2020
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Feuille de TD n°1

En préliminaire de cette première feuille de TD, voici trois rappels importants sur le module. **LISEZ-LES ! !**

1. Vous trouverez un certain nombre d'informations utiles sur la page web du module, régulièrement mise à jour :
   `https://perso.univ-rennes1.fr/david.bourqui/enseignement/1920/ANAR.html`
   Certaines mises à jour seront annoncées par voie de courrier électronique, envoyé à votre adresse `prenom.nom@etudiant.univ-rennes1.fr`. Plus généralement, des informations importantes pourront être transmises par cette même voie, et **il est nécessaire de consulter régulièrement votre boîte mail correspondante (au moins une fois par semaine)**.
2. Savoir faire un exercice signifie en particulier savoir rédiger une solution de manière claire, convaincante, et syntaxiquement correcte. Cette capacité à rédiger de manière satisfaisante est prise en compte de manière importante dans les évaluations écrites du module. Avoir un minimum d'aisance dans la rédaction d'arguments mathématiques fait partie des prérequis du module. On insiste entre autre sur les points suivants :
   - rédiger des phrases complètes, y compris lors de la présentation d'arguments faisant intervenir principalement des calculs, est nécessaire [1] ;
   - le fait d'écrire des mathématiques ne dispense pas, bien au contraire, du respect des règles élémentaires de grammaire et de syntaxe de la langue dans laquelle on rédige ;
   - l'utilisation des abréviations est à éviter voire à proscrire car elles rendent la lecture difficile (voire pire, *cf.* ci-dessous) et nuisent donc à la clarté du propos, pour un gain en termes de vitesse d'écriture très souvent négligeable ;
   - le point précédent est d'autant plus vrai lorsqu'il s'agit de l'emploi malheureusement fréquent des symboles logiques $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\iff$ en tant qu'abréviations ; notamment l'emploi du symbole $\Rightarrow$ comme abréviation pour « donc » est un contresens du point de vue de la logique et devrait être proscrit [2].

   Quelques exemples de rédactions de solution pour certains exercices de cette feuille sont mis en ligne sur la page du module.
3. On rappelle enfin que dans ce module, le terme *anneau* est synonyme d'*anneau commutatif unitaire.*

1. Attention toutefois à ne pas tomber non plus dans le verbiage, mais l'expérience montre que c'est bien plus souvent l'excès inverse qui se produit.
2. Ce n'est pas le lieu ici de refaire un cours de logique élémentaire ; je me contente de signaler par exemple qu'écrire « On a $x = 0 \Rightarrow P(x) = 0$ » et « On a $x = 0$, donc $P(x) = 0$ » ne signifie pas du tout la même chose.

Exercice 1.1

Soit E un ensemble et A un anneau. L'ensemble A^E des applications de E vers A est muni de l'addition et de la multiplication « terme à terme » induites par celles de A. Plus précisément, soit $f, g \in A^E$. Alors $f + g \in A^E$ est défini par

$$\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

et $f \times g \in A^E$ est défini par

$$\forall x \in E,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

1. Montrer que l'ensemble A^E muni de ces lois est un anneau.
2. On suppose que l'ensemble E est vide ; identifier A^E. Même question si l'ensemble E est de cardinal 1.
3. On suppose que E est un ensemble fini. Soit n le cardinal de E. Montrer que A^E est isomorphe à l'anneau produit A^n.
4. Montrer que l'ensemble des applications constantes de E vers A est un sous-anneau de A^E isomorphe à A.
5. Soit F un sous-ensemble de E et $\varphi\colon A^E \to A^F$ l'application qui à une application de E vers A associe sa restriction à F ; montrer que φ est un morphisme d'anneaux.
6. Décrire le groupe $(A^E)^\times$ comme un groupe produit en fonction de $A^\times$ et de E.
7. Soit $A^{(E)}$ l'ensemble des applications presque nulles de E vers A, c'est-à-dire

$$A^{(E)} = \{\varphi \in A^E, \{e \in E, \varphi(e) \neq 0\} \text{ est fini}\}.$$

   Est-ce que $A^{(E)}$ est un sous-anneau de A^E ?

Exercice 1.2

Soit A un anneau.

1. Soit E un ensemble et $(A_e)_{e\in E}$ une famille de sous-anneaux de A indexée par E. Montrer que $\cap_{e\in E} A_e$ est un sous-anneau de A.
2. Soit B et C deux sous-anneaux de A. Montrer par des exemples qu'en général ni $B \cup C$ ni $B + C = \{b + c\}_{(b,c)\in B\times C}$ ne sont des sous-anneaux de A.
3. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer que $\mathcal{I} = A$ si et seulement si $1 \in \mathcal{I}$ si et seulement si $\mathcal{I} \cap A^\times \neq \varnothing$.
4. Soit E un ensemble et $(\mathcal{I}_e)_{e\in E}$ une famille d'idéaux de A indexée par E. Montrer que $\cap_{e\in E}\mathcal{I}_e$ est un idéal de A.
5. Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}+\mathcal{J} = \{a+b\}_{(a,b)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}}$ et $\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}$ (ensemble des sommes finies de produits d'un élément de $\mathcal{I}$ par un élément de $\mathcal{J}$) sont des idéaux de A.
   (b) Généraliser la définition de l'idéal somme et de l'idéal produit au cas d'une famille d'idéaux indexée par un ensemble fini. Vérifier en particulier que si $\mathcal{K}$ est un idéal de A, on a $\mathcal{I} + (\mathcal{J} + \mathcal{K}) = (\mathcal{I} + \mathcal{J}) + \mathcal{K}$ et $\mathcal{I} \cdot (\mathcal{J} \cdot \mathcal{K}) = (\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) \cdot \mathcal{K}$.
   (c) Montrer par un exemple qu'en général $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ n'est pas un idéal de A.
   (d) Montrer qu'on a l'inclusion $\mathcal{I}.\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Montrer par un exemple que l'inclusion est stricte en général. Montrer que si $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$, alors $\mathcal{I}.\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

Exercice 1.3

Soit E un ensemble et $(A_e)_{e\in E}$ une famille d'anneaux indexée par E. On munit l'ensemble produit $\prod_{e\in E} A_e$ de deux lois « terme à terme » induites respectivemet par les additions et multiplications des anneaux A_e.

1. Montrer que l'ensemble $\prod_{e\in E} A_e$ muni de ces lois est un anneau.
2. Soit $f\in E$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \prod_{e\in E} A_e & \longrightarrow & A_f \\ (a_e)_{e\in E} & \longmapsto & a_f \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux.
3. Plus généralement, soit F une partie de E. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \prod_{e\in E} A_e & \longrightarrow & \prod_{e\in F} A_e \\ (a_e)_{e\in E} & \longmapsto & (a_e)_{f\in E} \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux.
4. Décrire le groupe $(\prod_{e\in E} A_e)^\times$ comme un groupe produit, en fonction des groupes $A_e^\times$.
5. On suppose que $E=\{1,2\}$. Montrer que l'anneau $A_1\times A_2$ est intègre si et seulement si quitte à échanger les indices A_1 est l'anneau nul et A_2 est intègre (en particulier si A_1 et A_2 sont non nuls, leur produit n'est pas intègre).
6. Plus généralement, montrer que $\prod_{e\in E} A_e$ est intègre si et seulement si l'ensemble des éléments $e\in E$ tel que A_e n'est pas l'anneau nul possède un unique élément f tel qu'en outre A_f est intègre.

Exercice 1.4

Soit A et B des anneaux et $\varphi\colon A\to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit $a\in A$ et $n\in\mathbf{Z}$. Montrer qu'on a $\varphi(n\cdot a)=n\cdot\varphi(a)$.
2. Soit $a\in A$ et $n\in\mathbf{N}$. Montrer qu'on a $\varphi\left(a^n\right)=\varphi(a)^n$.
3. Montrer que si φ bijectif, alors l'application réciproque φ^{-1} est un morphisme d'anneaux. En déduire qu'un morphisme d'anneaux est un isomorphisme si et seulement si l'application sous-jacente est bijective.
4. Soit C un anneau et $\psi\colon B\to C$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'application composée $\psi\circ\varphi$ est un morphisme d'anneaux.
5. Montrer que $\varphi(A^\times)\subset B^\times$. Montrer par un exemple que l'inclusion est stricte en général.
6. Soit C un sous-anneau de A. Montrer que $\varphi(C)$ est un sous-anneau de B.
7. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer par un exemple qu'en général $\varphi(\mathcal{I})$ n'est pas un idéal de B.
8. On suppose dans cette question φ surjectif. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer que $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de B.
9. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
10. Soit $\mathcal{J}$ un idéal premier de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal premier de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
11. Dans cette question on suppose φ surjectif. Montrer que l'application $\mathcal{J}\mapsto\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de B sur l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

12. Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B. Montrer par un exemple qu'en général $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ n'est pas un idéal maximal de A.

Exercice 1.5

Anneaux de polynômes et de séries formelles

Soit A un anneau. L'ensemble $A^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans A est muni de l'addition « terme à terme » induite par celle de A et de la multiplication $\times$ définie ainsi : soit $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^N$ et $\boldsymbol{b} = (b_n) \in A^{\mathbf{N}}$; alors $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ est la suite $\boldsymbol{c} = (c_n) \in A^{\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1. Montrer que $A^{\mathbf{N}}$ muni des lois décrites ci-dessus est un anneau.
2. Montrer que l'ensemble $A^{(\mathbf{N})}$ des suites presques nulles à valeurs dans A est un sous-anneau de $A^{\mathbf{N}}$.
3. Montrer que l'ensemble des suites à valeurs dans A dont tous les termes d'indice strictement positif sont nuls est un sous-anneau de $A^{(\mathbf{N})}$ isomorphe à A. On identifiera par la suite l'anneau A à ce sous-anneau.
4. On note X l'élément de $A^{(\mathbf{N})}$ défini par $X(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $X(n) = 0$. Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer que X^N est l'élément de $A^{(\mathbf{N})}$ qui vaut 1 en N et 0 partout ailleurs.
5. Soit B un anneau et $(b_n) \in B^{(\mathbf{N})}$. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N+1$ on a $b_n = 0$. On pose $\sum_{n=0}^{\infty} b_n := \sum_{n=0}^{N} b_n$. Vérifier que cette définition ne dépend pas du choix d'un tel N. Soit à présent $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^{(\mathbf{N})}$. Montrer que $(a_n X^n)$ est une suite presque nulle à valeurs dans $A^{(\mathbf{N})}$ et qu'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n = \boldsymbol{a}$.
   On note $A^{(\mathbf{N})} = A[X]$ (anneau des polynômes en une indéterminée à coefficients dans A) et $A^{\mathbf{N}} = A[[X]]$ (anneau des séries formelles en une indéterminée à coefficients dans A). Pour tout $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^{\mathbf{N}}$, on note
   $$\boldsymbol{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n.$$
6. Soit $F \in A[[X]]$ une série formelle, notée $F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, où $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$. La valuation de F, notée $\nu(F)$, est l'élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ défini par
   $$\nu(F) = \mathrm{Inf}\{n \in \mathbf{N}, \quad a_n \neq 0\}.$$
   Si $\nu(F) \neq +\infty$, la *composante angulaire* de F est l'élément $a_{\nu(F)} \in A \setminus \{0\}$.
   Vérifier que pour tout $F \in A[[X]]$ on a $\nu(F) = +\infty$ si et seulement si $F = 0$.
   Montrer que pour tout $F \in A[[X]]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\nu(F) = n$ si et seulement s'il existe $\alpha \in A \setminus 0$ et $G \in A[[X]]$ tel que $F = X^n(\alpha + XG)$ et qu'alors α est la composante angulaire de F.
   Soit $F, G \in A[[X]]$. Montrer qu'on a $\nu(F+G) \geqslant \mathrm{Min}(\nu(F), \nu(G))$ avec égalité si $\nu(F) \neq \nu(G)$. On suppose en outre que la composante angulaire de F n'est pas un diviseur de zéro. Montrer qu'on a $\nu(FG) = \nu(F) + \nu(G)$. Ici on adopte les conventions standard :
   $$\forall n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}, \quad n \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}, \quad (+\infty) + n = +\infty$$

7. Montrer que l'anneau $A[[X]]$ est intègre si et seulement si l'anneau $A[X]$ est intègre si et seulement si l'anneau A est intègre.
8. On suppose l'anneau A intègre. Montrer que $A[X]^{\times} = A^{\times}$.
9. En considérant par exemple le cas où $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, montrer qu'en général si A n'est pas intègre il existe des éléments de $A[X]^{\times}$ qui ne sont pas des polynômes constants (*cf.* aussi l'exercice 1.10).
10. Soit $x \in A$. Montrer que l'application $A[X] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[X]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie et est un morphisme d'anneaux.
11. Montrer que l'application $A[[X]] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[[X]]$ associe a_0 est un morphisme d'anneaux. Plus généralement, soit $x \in A$ un élément nilpotent (c'est-à-dire : il existe un entier strictement positif m tel que $x^m = 0$). Montrer que l'application $A[[X]] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[[X]]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie et est un morphisme d'anneaux.
12. Montrer que
$$A[[X]]^{\times} = \{(a_n) \in A^{\mathbf{N}}, \quad a_0 \in A^{\times}\}.$$
Quel est l'inverse de $1 - X$ dans $A[[X]]$?
13. On suppose dans cette question que $A = \mathbf{K}$ est un corps. Montrer que l'idéal $X \cdot \mathbf{K}[[X]]$ est un idéal maximal de $\mathbf{K}[[X]]$, et que c'est l'unique idéal maximal de $\mathbf{K}[[X]]$. Montrer que l'application qui à $n \in \mathbf{N}$ associe $X^n \cdot \mathbf{K}[[X]]$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur l'ensemble des idéaux de $\mathbf{K}[[X]]$ distincts de l'idéal nul. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbf{K}[[X]]$?
14. Soit (F_n) une suite d'éléments de $A[[X]]$. On suppose que la suite $(\nu(F_n))$ tend vers $+\infty$. Montrer qu'on peut donner un sens à $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$, compatible avec la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ pour un élément $\boldsymbol{a} \in A^{\mathbf{N}}$.

Exercice 1.6

Soient A et B des anneaux.

1. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A et $\mathcal{J}$ un idéal de B. Montrer que $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ est un idéal de $A \times B$.
2. Décrire l'ensemble des idéaux de $A \times B$ en fonction de l'ensemble des idéaux de A et de l'ensemble des idéaux de B.
3. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\mathfrak{p} \times B$ est un idéal premier de $A \times B$.
4. Décrire l'ensemble des idéaux premiers de $A \times B$ en fonction de l'ensemble des idéaux premiers de A et de l'ensemble des idéaux premiers de B.

Exercice 1.7

Quelques exemples d'anneaux

1. On désigne par i un élément de $\mathbf{C}$ tel que $i^2 = -1$. Soit $\mathbf{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ défini par
$$\mathbf{Z}[i] = \{a + b\,i\}_{(a,b)\in\mathbf{Z}^2}.$$
   (a) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau intègre. Est-il isomorphe à $\mathbf{Z}^2$?
   (b) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{C}$ envoyant X sur i (*cf.* exercice 1.8).
   (c) Montrer que l'application
$$N \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ z & \longmapsto & z\bar{z} \end{array}$$

est bien définie et vérifie

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{Z}[i]^2, \quad N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2).$$

(d) Décrire explicitement le groupe $\mathbf{Z}[i]^{\times}$.

2. Soit x un entier non nul. Soit $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ définit par

$$\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right] = \left\{\frac{a}{x^n}\right\}_{a\in\mathbf{Z},\, n\in\mathbf{N}}.$$

   (a) Comment appelle-t-on $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$?

   (b) Montrer que $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ est un anneau intègre contenant $\mathbf{Z}$.

   (c) Montrer que $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ est l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{Q}$ envoyant X sur $\frac{1}{x}$ (*cf.* exercice 1.8).

   (d) Décrire le plus explicitement possible le groupe $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]^{\times}$.

3. Soit p un nombre premier et

$$\mathbf{Z}_{(p)} := \left\{\frac{a}{b}\right\}_{a\in\mathbf{Z},\, b\in\mathbf{Z}\setminus p\mathbf{Z}}.$$

   (a) Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est un anneau intègre contenant $\mathbf{Z}$.

   (b) Soit

$$\nu_p \colon \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$$

   la fonction telle que $\nu_p(0) = +\infty$ et qui à $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}_{(p)} \setminus \{0\}$ associe le plus grand entier positif n tel que p^n divise a. Cette fonction s'appelle la « valuation p-adique ». Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbf{Z}_{(p)}$ on a

$$\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$$

$$\text{et} \quad \nu_p(x+y) \geqslant \operatorname{Min}(\nu_p(x), \nu_p(y)) \text{ avec égalité si } \nu_p(x) \neq \nu_p(y).$$

   (c) Décrire le plus explicitement possible le groupe $\mathbf{Z}_{(p)}^{\times}$. On pourra notamment donner une caractérisation simple de $\mathbf{Z}_{(p)}^{\times}$ en termes de ν_p.

   (d) Montrer que l'idéal $p \cdot \mathbf{Z}_{(p)}$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$, et que c'est l'unique idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Montrer que l'application qui à $n \in \mathbf{N}$ associe $p^n \cdot \mathbf{Z}_{(p)}$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur l'ensemble des idéaux de $\mathbf{Z}_{(p)}$ distincts de l'idéal nul. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbf{Z}_{(p)}$?

4. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$.

   (a) Montrer que $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ est un anneau.

   (b) Déterminer les éléments inversibles de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$

   (c) Déterminer les éléments nilpotents (*cf.* exercice 1.10) de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$.

   (d) Déterminer les diviseurs de zéros de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$. Est-ce un anneau intègre ?

5. Déterminer, à isomorphisme près, tous les anneaux dont le cardinal est inférieur ou égal à 4.

Exercice 1.8

1. Pour chacun des couples (A, B) d'anneaux ci-dessous, déterminer l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B)$ des morphismes d'anneaux de A vers B.
$$(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}), \quad (\mathbf{Z}, \mathbf{Q}), \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{Z}), \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), \quad (\mathbf{Z}[i], \mathbf{Z}[i]) \quad (\textit{cf.}\ \text{exercice } 1.7)$$
$$(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \quad (m, n \in \mathbf{N}), \quad (\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$
2. Soit A un anneau. Soit $\iota\colon A \to A[X]$ l'application qui à $a \in A$ associe le polynôme constant a. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A[X], B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B) \times B \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi \circ \iota, \varphi(X)) \end{array}$$
est une bijection.

Exercice 1.9

Un anneau est dit *local* s'il possède un unique idéal maximal.

1. Vérifier qu'un corps est un anneau local.
2. Soit A un anneau. Montrer que A est local si est seulement si $A \setminus A^\times$ est un idéal de A.
3. Donner le plus possible d'exemples (dans l'idéal, une infinité) d'anneaux locaux non deux à deux isomorphes et qui ne sont pas des corps (on pourra tirer son inspiration d'autres exercices de cette feuille).

Exercice 1.10

Soit A un anneau. Un élément a de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif m tel que $a^m = 0$. L'anneau A est dit *réduit* s'il n'a pas d'éléments nilpotents non nuls.

1. Vérifier qu'un anneau intègre est réduit.
2. Soit n un entier positif. Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
3. Donner un exemple d'anneau non intègre, non nul et réduit.
4. Soit a un élément nilpotent de A. Montrer que $1 + a$ est inversible. Soit $b \in A^\times$. Montrer que $b + a$ est inversible.
5. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A. On l'appelle le *nilradical de A* et on le note $\mathrm{Nil}(A)$. Montrer que l'anneau quotient $A/\mathrm{Nil}(A)$ est réduit.
6. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \subset \mathfrak{p}$.
7. (si vous connaissez le lemme de Zorn) Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A. Indication : soit $x \notin \mathrm{Nil}(A)$; considérer l'ensemble des idéaux de A qui ne rencontrent pas l'ensemble $\{x^m\}_{m \in \mathbf{N}}$.
8. Montrer qu'un élément de $A[X]$ est nilpotent si et seulement si ses coefficients sont des éléments de $\mathrm{Nil}(A)$. En déduire que $A[X]^\times = A^\times + \mathrm{Nil}(A[X])$.
9. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Le *radical* de $\mathcal{I}$ est le sous-ensemble de A noté $\sqrt{\mathcal{I}}$ et défini par
$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{a \in A, \quad \exists n \in \mathbf{N}, \quad a^n \in \mathcal{I}\}$$
Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de A contenant $\mathcal{I}$ et contenu dans tout idéal premier contenant $\mathcal{I}$. Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}}$. Montrer que $A/\mathcal{I}$ est réduit si et seulement si $\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$.

10. Pour chacun des anneaux suivants, décrire le radical de chacun de ses idéaux : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (n entier positif), $\mathbf{K}[X]$ ($\mathbf{K}$ un corps).

Exercice 1.11

1. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
2. Montrer que tout anneau intègre ne possédant qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.
3. Montrer que tout anneau non nul dont tous les idéaux propres sont premiers est un corps.