

Contrôle continu n°2

Mercredi 8 avril 2020, 16h15 – 17h30

On veillera à la qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même qu'au soin apporté à la présentation. *Sauf mention expresse du contraire, une justification est attendue pour toutes les réponses.*

Les questions qui suivent sont censées être traitées sans documents et notes de cours et de TD, calculatrices, téléphones portables et assimilés.

Exercice 1

- 1 Soit a et b des entiers strictement positifs premiers entre eux. Soit G un groupe noté multiplicativement, d'élément neutre noté e , et x et y deux éléments de G d'ordre respectifs a et b et tels que $xy = yx$. Déterminer l'ordre de xy .
- 2 Donner *sans justification* la liste des polynômes de $\mathbf{F}_2[X]$ qui sont irréductibles de degré 2.
- 3 Montrer que le polynôme $P_1 := X^4 + X + [1]_2$ est un élément irréductible de $\mathbf{F}_2[X]$.
- 4 Soit $\mathbf{K} := \mathbf{F}_2[X]/\langle X^4 + X + [1]_2 \rangle$. Donner *sans justification* la caractéristique et le cardinal de \mathbf{K} .
- 5 On note α l'image de X dans \mathbf{K} par le morphisme quotient. Soit $x := \alpha^2 + \alpha$ et $y := \alpha^3$. Calculer x^3 . Montrer que $y^5 = [1]_2$. En déduire un générateur explicite du groupe \mathbf{K}^\times .
- 6 Le polynôme $P_2 := X^3 + X^2 + X + [1]_2$ a-t-il une racine dans \mathbf{K} ? Même question pour le polynôme $P_3 := X^3 + X^2 + [1]_2$.

Exercice 2

Pour tout entier strictement positif a , on note A_a l'image dans \mathbf{Q} de l'unique morphisme d'anneaux $\pi_a: \mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{Q}$ qui envoie X sur $\frac{1}{a}$.

- 1 Montrer que $A_a = \left\{ \frac{b}{a^n} \right\}_{b \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}}$.
- 2 Donner *sans justification* une partie multiplicative S de \mathbf{Z} telle que A_a est isomorphe au localisé de \mathbf{Z} par rapport à S . Donner *sans justification* le corps des fractions de A_a .
- 3 Soit \mathbf{K} un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 1. Montrer que l'anneau quotient $\mathbf{K}[X]/\langle P \rangle$ est isomorphe à \mathbf{K} . *En admettant* que le noyau de π_a est l'idéal de $\mathbf{Z}[X]$ engendré par $aX - 1$, en déduire, pour tout nombre premier p , une description simple du quotient A_a/pA_a .
- 4 Montrer que l'idéal engendré par 3 dans A_2 est premier. En déduire que les anneaux A_2 et A_3 ne sont pas isomorphes.
- 5 Soit a et a' des entiers strictement positifs. Énoncer *sans démonstration* une condition nécessaire et suffisante, portant sur les facteurs premiers de a et a' , pour que les anneaux A_a et $A_{a'}$ soient isomorphes.