Université de Rennes 1 | Année universitaire 2019-2020
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Contrôle continu n°2
Mercredi 8 avril 2020, 16h15 – 17h30

On veillera à la qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même qu'au soin apporté à la présentation. *Sauf mention expresse du contraire, une justification est attendue pour toutes les réponses.*

Les questions qui suivent sont censées être traitées sans documents et notes de cours et de TD, calculatrices, téléphones portables et assimilés.

Exercice 1

1 Soit a et b des entiers strictement positifs premiers entre eux. Soit G un groupe noté multiplicativement, d'élément neutre noté e, et x et y deux éléments de G d'ordre respectifs a et b et tels que $xy = yx$. Déterminer l'ordre de xy.
2 Donner *sans justification* la liste des polynômes de $\mathbf{F}_2[X]$ qui sont irréductibles de degré 2.
3 Montrer que le polynôme $P_1 := X^4 + X + [1]_2$ est un élément irréductible de $\mathbf{F}_2[X]$.
4 Soit $\mathbf{K} := \mathbf{F}_2[X]/\langle X^4 + X + [1]_2\rangle$. Donner *sans justification* la caractéristique et le cardinal de $\mathbf{K}$
5 On note α l'image de X dans $\mathbf{K}$ par le morphisme quotient. Soit $x := \alpha^2 + \alpha$ et $y := \alpha^3$. Calculer x^3. Montrer que $y^5 = [1]_2$. En déduire un générateur explicite du groupe $\mathbf{K}^\times$.
6 Le polynôme $P_2 := X^3 + X^2 + X + [1]_2$ a-t-il une racine dans $\mathbf{K}$? Même question pour le polynôme $P_3 := X^3 + X^2 + [1]_2$.
7 **(question bonus)** Montrer que $x^2 + x + [1]_2 = 0$. En déduire la liste explicite des éléments d'un sous corps de $\mathbf{K}$ de cardinal 4.

Exercice 2

Pour tout entier strictement positif a, on note A_a l'image dans $\mathbf{Q}$ de l'unique morphisme d'anneaux $\pi_a\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Q}$ qui envoie X sur $\frac{1}{a}$.
1 Montrer que $A_a = \{\frac{b}{a^n}\}_{b\in\mathbf{Z},\, n\in\mathbf{N}}$.
2 Donner *sans justification* une partie multiplicative S de $\mathbf{Z}$ telle que A_a est isomorphe au localisé de $\mathbf{Z}$ par rapport à S. Donner *sans justification* le corps des fractions de A_a.
3 Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 1. Montrer que l'anneau quotient $\mathbf{K}[X]/\langle P\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{K}$. *En admettant* que le noyau de π_a est l'idéal de $\mathbf{Z}[X]$ engendré par $aX - 1$, en déduire, pour tout nombre premier p, une description simple du quotient A_a/pA_a.
4 Montrer que l'idéal engendré par 3 dans A_2 est premier. En déduire que les anneaux A_2 et A_3 ne sont pas isomorphes.
5 Soit a et a' des entiers strictement positifs. Énoncer *sans démonstration* une condition nécessaire et suffisante, portant sur les facteurs premiers de a et a', pour que les anneaux A_a et $A_{a'}$ soient isomorphes.
6 **(question bonus)** Démontrer le résultat énoncé à la question précédente.
7 **(question bonus)** Démontrer le résultat admis sur le noyau de π_a à la question 3. Le premier résultat de la question 3 est-il encore vrai si on remplace le corps $\mathbf{K}$ par un anneau intègre A quelconque ?