Université de Rennes 1 Année universitaire 2019-2020
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Contrôle continu n°1
Mercredi 19 février 2020, 16h15 – 17h30

La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées*. Il est conseillé de s'attacher aux consignes précédentes plutôt que de chercher à traiter le maximum de questions quitte à s'en affranchir.

Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Si vous souhaitez utiliser un résultat d'un exercice de TD non énoncé en cours, un tel résultat doit être redémontré.

Question de cours
Soit A un anneau. Donner, sans utiliser la notion de quotient, les définitions des notions suivantes : idéal de A, idéal premier de A, idéal maximal de A. Montrer que tout idéal maximal de A est un idéal premier de A.

Exercice 1
Soit A l'anneau d'ensemble sous-jacent $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, muni des lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{C}^2, \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{C}^2, \quad (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) := (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

On admettra que ces lois définissent bien une structure d'anneau sur A.

1. Donner les éléments neutres pour les lois $+$ et $\times$ sur A (*aucune justification n'est demandée*).
2. Montrer que l'application $f : \mathbf{C} \to A$, $x \mapsto (x, 0)$ est un morphisme d'anneaux et en déduire que A possède un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{C}$.
3. Montrer que $A^\times = \{(x, y) \in A, \quad x \neq 0\}$. Pour tout élément de $A^\times$, expliciter son inverse.
4. Pour $y \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, calculer $(0, y)^n$. L'anneau A est-il intègre ?
5. Déteminer l'ensemble des solutions de l'équation $a^2 = 0_A, \quad a \in A$.
6. Donner un exemple d'un élément de $A[X]^\times$ qui est de degré 1.
7. Montrer que l'anneau A possède exactement 3 idéaux que l'on explicitera, et que parmi eux un seul est premier.
8. Un anneau B est dit réduit si pour tout $b \in B$ et tout entier strictement positif n, la relation $b^n = 0$ entraîne $b = 0$. L'anneau A étudié précédemment est-il réduit ? Montrer que le produit de deux anneaux réduits est encore réduit. On admettra par la suite qu'un produit quelconque d'anneaux réduits est encore réduit.
9. Combien l'équation $x^2 = 1, \quad x \in \mathbf{Z}$ a-t-elle de solutions ?
10. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit B un anneau réduit tel que l'équation $x^2 = 1_B, \quad x \in B$ a exactement 2^n solutions. L'anneau B peut-il être intègre ? Donner un exemple d'un tel anneau B.
11. **(bonus, hors barême)** Identifier l'anneau A ci-dessus à un quotient de $\mathbf{C}[X]$. Retrouver le résultat de la question 7.