Université de Rennes 1 | Année universitaire 2019-2020
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Contrôle continu n°1
Mercredi 19 février 2020, 16h15 – 17h30

Exercice 1

Soit A l'anneau d'ensemble sous-jacent $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, muni des lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{C}^2,\quad (x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{C}^2,\quad (x_1,y_1)\times(x_2,y_2):=(x_1x_2,x_1y_2+x_2y_1).$$

On admettra que ces lois définissent bien une structure d'anneau sur A.

1. Donner les éléments neutres pour les lois $+$ et $\times$ sur A (*aucune justification n'est demandée*).
   Correction : L'élément neutre pour la loi $+$ est $(0,0)$ et l'élément neutre pour la loi $\times$ est $(1,0)$
2. Montrer que l'application $f\colon \mathbf{C}\to A$, $x\mapsto (x,0)$ est un morphisme d'anneaux et en déduire que A possède un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{C}$.
   Correction : Soit $x_1,x_2\in\mathbf{C}$. On a, par définition de f et de la loi $+$ sur A,
   $$f(x_1+x_2)=(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0+0)=(x_1+x_2,0)=f(x_1)+f(x_2).$$
   On a, par définition de f et de la loi $\times$ sur A,
   $$f(x_1\times x_2)=(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1x_2,x_1.0+x_2.0)=(x_1x_2,0)=f(x_1)\times f(x_2).$$
   Par ailleurs $f(1)=(1,0)=1_A$ (*cf.* question précédente). Ainsi f est bien un morphisme d'anneaux.
   Par ailleurs f est une application injective. En effet, pour $x_1,x_2\in\mathbf{C}$, l'égalité $f(x_1)=f(x_2)$, autrement dit $(x_1,0)=(x_2,0)$ entraîne bien $x_1=x_2$.
   On en déduit que f induit un morphisme d'anneaux bijectif (et donc un isomorphisme d'anneaux) de $\mathbf{C}$ sur le sous-anneau $f(\mathbf{C})$ de A. Donc $f(\mathbf{C})$ est un sous-anneau de A isomorphe à $\mathbf{C}$.
3. Montrer que $A^\times=\{(x,y)\in A,\quad x\neq 0\}$. Pour tout élément de $A^\times$, expliciter son inverse.
   Correction : Rappelons tout d'abord que $\mathbf{C}$ étant un corps, on a $\mathbf{C}^\times=\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
   Montrons l'inclusion $A^\times\subset\{(x,y)\in A,\quad x\neq 0\}$. Soit $(x,y)\in A^\times$. Il existe donc $(x',y')\in A$ tel que $(x,y)\times(x',y')=(1,0)$, soit $(xx',xy'+x'y)=(1,0)$. On a donc en particulier $xx'=1$, donc $x\in\mathbf{C}^\times=\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
   Montrons à présent l'inclusion $\{(x,y)\in A,\quad x\neq 0\}\subset A^\times$. Soit $(x,y)\in A$ avec $x\neq 0$. En particulier $x\in\mathbf{C}^\times$. Mais on a
   $$(x,y)\times(x^{-1},-x^{-2}y)=(x.x^{-1},-x.x^{-2}y+x^{-1}y)=(1,-x^{-1}y+x^{-1}y)=(1,0)=1_A.$$
   Donc $(x,y)\in A^\times$, et l'inverse de (x,y) dans A est $(x^{-1},-x^{-2}y)$.
4. Pour $y\in\mathbf{C}$ et $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$, calculer $(0,y)^n$. L'anneau A est-il intègre ?
   Correction : On a $(0,y)^1=(0,y)$. Par ailleurs
   $$(0,y)^2=(0,y)\times(0,y)=(0.0,0.y+0.y)=(0,0)=0_A$$

Pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$(0,y)^n = (0,y)^2 \times (0,y)^{n-2} = 0_A \times (0,y)^{n-2} = 0_A.$$

Au final on a $(0,y)^1 = (0,y)$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $(0,y)^n = 0_A$.
En particulier, on a $(0,1) \times (0,1) = 0_A$. Comme $(0,1) \neq 0_A$, ceci montre que A n'est pas intègre.

5. Déteminer l'ensemble des solutions de l'équation $a^2 = 0, \quad a \in A$.
   Correction : Soit $a \in A$ tel que $a^2 = 0_A$. Si $a \in A^\times$, on en déduit en multipliant par a^{-1} que $a = 0$ ce qui est absurde (A n'est pas l'anneau nul). Donc $a \notin A^\times$, et d'après la question 3 il existe $y \in \mathbf{C}$ tel que $a = (0,y)$. Mais d'après la question précédente, pour tout $y \in \mathbf{C}$, on a $(0,y)^2 = 0_A$. Ceci montre que l'ensemble de solutions cherché est

$$\{(0,y), \quad y \in \mathbf{C}\}.$$

6. Donner un exemple d'un élément de $A[X]^\times$ qui est de degré 1.
   Correction : Considérons les éléments $P = (1,0) + (0,1)X$ et $Q = (1,0) - (1,0)X$. On a $P.Q = (1,0)^2 - (0,1)^2X^2 = 1_A - 0_A.X^2 = 1_A$. Ainsi P est un élément inversible de $A[X]$, d'inverse Q.
7. Montrer que l'anneau A possède exactement 3 idéaux que l'on explicitera, et que parmi eux un seul est premier.
   Correction : A n'est pas l'anneau nul et possède donc au moins deux idéaux distincts à savoir A et $\{0_A\}$. Soit $\mathcal{I} = \{(0,y), \quad y \in \mathbf{C}\}$. Notons que $\mathcal{I} \notin \{\{0_A\}, A\}$. D'après la question 3, on a $A \setminus \mathcal{I} = A^\times$, donc tout idéal propre de A est inclus dans $\mathcal{I}$. Montrons que $\mathcal{I}$ est un idéal de A et que tout idéal non nul de A contenu dans $\mathcal{I}$ est égal à $\mathcal{I}$. Ceci permettra de conclure que A possède exactement 3 idéaux, à savoir A, $\{0_A\}$ et $\mathcal{I}$.
   En prenant $y = 0$, on voit que $0_A = (0,0) \in \mathcal{I}$. Soit $y_1, y_2 \in \mathbf{C}$. On a $(0,y_1) + (0,y_2) = (0, y_1 + y_2) \in \mathcal{I}$ et $-(0,y_1) = (0,-y_1) \in \mathcal{I}$. Enfin soit $(x,y) \in A$. On a

$$(x,y) \times (0,y_1) = (x.0, x.y_1 + 0.y) = (0, x.y_1) \in \mathcal{I}.$$

   Ce qui précède montre bien que $\mathcal{I}$ est un idéal de A. On pouvait aussi par exemple montrer que l'application $A \to \mathbf{C}$, $(x,y) \mapsto x$ est un morphisme d'anneaux et constater que $\mathcal{I}$ est son noyau.
   Soit $\mathcal{J}$ un idéal de A non nul contenu dans $\mathcal{I}$. Montrons que $\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Comme $\mathcal{J}$ est non nul, il existe $z \in \mathbf{C}^\times$ tel que $(0,z) \in \mathcal{J}$. Soit $y \in \mathbf{C}$. On a alors $(yz^{-1}, 0) \times (0,z) \in \mathcal{J}$, or $(yz^{-1}, 0) \times (0,z) = (0, yz^{-1}z) = (0,y)$. Ceci montre qu'on a $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ et donc $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ par double inclusion.
   L'idéal A n'est pas propre et n'est donc pas premier. Comme A n'est pas intègre (question 4), $\{0\}$ n'est pas non plus un idéal premier.
   Il reste à montrer que $\mathcal{I}$ est premier. Ceci peut se voir de plusieurs façons :
   (a) Comme A n'est pas l'anneau nul, A possède au moins un idéal premier. Comme A et $\{0_A\}$ ne sont pas premiers, le troisième idéal de A, à savoir $\mathcal{I}$, est nécessairement premier.
   (b) On peut montrer directement que si un produit d'éléments de A est dans $\mathcal{I}$, alors l'un des deux facteurs est dans $\mathcal{I}$ (NB : $\mathcal{I}$ est un idéal propre).
   (c) Comme les seuls idéaux de A sont $\{0\}$, $\mathcal{I}$ et A, et $\mathcal{I}$ est un idéal propre, $\mathcal{I}$ est nécessairement un idéal maximal, donc un idéal premier.

(d) On peut également exploiter le fait que $\mathcal{I}$ est le noyau du morphisme $A \to \mathbf{C}$, $(x, y) \mapsto x$ évoqué ci-dessus. Ainsi $A/\mathcal{I}$ est isomorphe à un sous-anneau de l'anneau intègre $\mathbf{C}$, donc $A/\mathcal{I}$ est intègre et $\mathcal{I}$ est premier. Bien sûr, il est facile de voir que le morphisme ci-dessus est en fait surjectif. Comme $\mathbf{C}$ est un corps, on retrouve ainsi directement le fait que $\mathcal{I}$ est maximal (donc premier).

8. Un anneau B est dit réduit si pour tout $b \in B$ et tout entier strictement positif n, la relation $b^n = 0$ entraîne $b = 0$. L'anneau A étudié précédemment est-il réduit ? Montrer que le produit de deux anneaux réduits est encore réduit. On admettra par la suite qu'un produit quelconque d'anneaux réduits est encore réduit.

   Correction : On a vu par exemple que $(0, 1) \neq 0_A$ et $(0, 1)^2 = 0_A$. Donc A n'est pas réduit. Soit B_1, B_2 deux anneaux réduits. Montrons que l'anneau produit $B_1 \times B_2$ est réduit. Soit n un entier strictement positif et $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ tel que $(b_1, b_2)^n = 0_{B_1 \times B_2} = (0_{B_1}, 0_{B_2})$. Par définition de la structure d'anneau produit, on a donc $b_1^n = 0_{B_1}$ et $b_2^n = 0_{B_2}$. Comme B_1 et B_2 sont réduits, on en déduit $b_1 = 0_{B_1}$ et $b_2 = 0_{B_2}$, soit $(b_1, b_2) = 0_{B_1 \times B_2}$. Ainsi l'anneau $B_1 \times B_2$ est bien réduit.

9. Combien l'équation $x^2 = 1, \quad x \in \mathbf{Z}$ a-t-elle de solutions ?

   Correction : L'équation se réécrit $(x - 1)(x + 1) = 0$. Comme $\mathbf{Z}$ est intègre, cette dernière relation équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$, et comme $1 \neq -1$ dans $\mathbf{Z}$, ceci montre que l'ensemble des solutions de cette équation, soit $\{1, -1\}$, est de cardinal 2.

10. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit B un anneau réduit tel que l'équation $x^2 = 1_B, \quad x \in B$ a exactement 2^n solutions. L'anneau B peut-il être intègre ? Donner un exemple d'un tel anneau B.

    Correction : Le polynôme $X^2 - 1_B$ est de degré 2. Si B est intègre, ce polynôme a donc au plus 2 racines dans B. Comme $n \geqslant 2$, on a $2^n > 2$. Donc B ne peut pas être intègre.

    Prenons par exemple $B := \mathbf{Z}^n$ (muni de la structure d'anneau produit). Comme $\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}$ est réduit et donc B est réduit d'après le résultat admis de la question 8.

    Par définition de l'anneau produit et la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 1_B, \quad x \in B$ est $\{-1, 1\}^n$, qui est de cardinal 2^n. NB : si on prend $B := \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, on a un exemple d'anneau réduit B tel que l'équation $x^2 = 1_B, \quad x \in B$ possède une infinité de solutions.

11. **(bonus, hors barême)** Identifier l'anneau A ci-dessus à un quotient de $\mathbf{C}[X]$. Retrouver le résultat de la question 7.

    Correction : Soit $P = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n X^n$ un élément de $\mathbf{C}[X]$. Posons $\pi(P) := (a_0, a_1) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. On vérifie que π est un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathbf{C}[X]$ vers A, de noyau $\langle X^2 \rangle$. Ainsi A est isomorphe à $\mathbf{C}[X]/\langle X^2 \rangle$. Rappelons que $\mathcal{I} \mapsto \pi(\mathcal{I})$ induit une bijection de l'ensemble des idéaux de $\mathbf{C}[X]$ contenant $\mathrm{Ker}(\pi) = \langle X^2 \rangle$ sur l'ensemble des idéaux de A, qui induit à son tour une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{C}[X]$ contenant $\langle X^2 \rangle$ sur l'ensemble des idéaux premiers de A. Or on a une correspondance entre les idéaux de $\mathbf{C}[X]$ contenant $\langle X^2 \rangle$ et les diviseurs unitaires du polynôme X^2. Ainsi les idéaux de $\mathbf{C}[X]$ contenant $\langle X^2 \rangle$ sont $\langle 1 \rangle = \mathbf{C}[X]$, $\langle X \rangle$ et $\langle X^2 \rangle$. Parmi ces idéaux, les idéaux premiers sont ceux engendrés par un polynômes irréductible. Ainsi seul $\langle X \rangle$ est premier. On retrouve ainsi le résultat de la question 7 ; noter que $\pi(\mathbf{C}[X]) = A$, $\pi(\langle X^2 \rangle) = \pi(\mathrm{Ker}(\pi)) = \{0_A\}$ et $\pi(\langle X \rangle) = \pi(\{aX\}_{a \in \mathbf{C}}) = \{(0, a)\}_{a \in \mathbf{C}} = \mathcal{I}$.