Université de Rennes 1 | Année universitaire 2018-2019
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Examen terminal
(deuxième session)
17 juin 2019, 8h – 10h

Le sujet comporte deux pages et six exercices. La qualité de la rédaction et de l'argumentation entre dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.* Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés.

Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.

Exercice 1

Soit A et B des anneaux et $f\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Rappeler la définition d'un morphisme d'anneaux.
2. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A.
3. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Est-ce que $f(\mathcal{I})$ est nécessairement un idéal de B ?
4. Soit $\mathcal{J}$ un idéal premier de B. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal premier de A.
5. Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B. Est-ce que $f^{-1}(\mathcal{J})$ est nécessairement un idéal maximal de A ?

Exercice 2

Soit $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ l'image de l'unique morphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{C}$ qui envoie X sur $i\sqrt{2}$. Pour tout $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, on pose $N(z) := z\bar{z}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/(X^2+2)\mathbf{Z}[X]$.
2. Soit $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$. Montrer que $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.
3. 9 est-il un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$? Même question pour 3 et 5.

Exercice 3

Le polynôme $2X^4 - 14\,X + 154$ est-il irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$? dans $\mathbf{Q}[X]$?

Exercice 4

Convaincre le correcteur en quelques lignes que vous savez décrire explicitement un corps à 9 éléments et (à l'aide de quelques exemples bien choisis) y faire des calculs. *Aucune justification n'est demandée*, mais on introduira soigneusement les notations utilisées, et on ne négligera pas la présentation.

Exercice 5

Soit x un entier non nul et A_x le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ défini par

$$A_x = \left\{ \frac{a}{x^n} \right\}_{a \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{N}}.$$

1. *Pour cette question aucune justification n'est demandée.* Comment appelle-t-on A_{10} ?
2. Montrer que A_x est un anneau intègre pour l'addition et la multiplication usuelle. Montrer que A_x est l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Q}$ qui envoie X sur $\frac{1}{x}$. Quel est le corps des fractions de A_x ?
3. *Pour cette question aucune justification n'est demandée.* Décrire une partie multiplicative S de $\mathbf{Z}$ tel que A_x soit isomorphe au localisé de $\mathbf{Z}$ par rapport à S.

Exercice 6

Soit A un anneau et $e \in A$. On dit que e est un *idempotent* si $e^2 = e$. Si e est un idempotent, on dit que e est *non trivial* si $e \notin \{1_A, 0_A\}$.

Par ailleurs, pour tout $a \in A$, on note $A[1/a]$ le localisé de A par rapport à $\{a^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $\iota_a \colon A \to A[1/a]$ le morphisme de localisation.

1. Déterminer l'ensemble des idempotents non triviaux de A dans les cas suivants : A est intègre, $A = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $A = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (p premier, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$).
2. Soit e un idempotent non trivial de A. Montrer que $1_A - e$ est également un idempotent non trivial de A. Montrer que l'idéal eA est propre.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe des anneaux B et C *non nuls* tels que A est isomorphe à $B \times C$;
   (b) il existe un idempotent non trivial e dans A

   Indication : Considérer l'anneau produit $A/eA \times A/(1-e)A$.
4. Soit $a \in A$ tel qu'il existe $b \in A$ tel que $a^2b = a$. Montrer que ab est idempotent. Montrer que $A/(1-ba)A = A[1/a]$ et que le morphisme de localisation ι_a est le morphisme quotient $A \to A/(1-ba)A$.
5. Soit $a \in A$. On note $\pi_a \colon A \to A/aA$ le morphisme quotient. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe $b \in A$ tel que $a^2b = a$;
   (b) on a $a^2A = aA$;
   (c) le morphisme $A \to A[1/a] \times A/aA$ qui à $\alpha \in A$ associe $(\iota_a(\alpha), \pi_a(\alpha))$ est un isomorphisme d'anneaux.