

5 Localisation (construire des anneaux à partir d'autres anneaux, partie 3). Corps des fractions d'un anneau intègre.

La localisation est un procédé algébrique très général qui consiste en deux mots à « forcer » certains éléments d'un anneau à devenir inversibles, de façon notamment à obtenir un « calcul des fractions généralisé » aux propriétés similaires à celles du calcul des fractions classique que l'on connaît depuis notre plus tendre enfance. Le cas particulier le plus connu de ce procédé est la construction de \mathbf{Q} à partir de \mathbf{Z} , qui se généralise en la notion de corps des fractions d'un anneau intègre : dans ce cas, on force en un sens tous les éléments non nuls à devenir inversibles. Mais la localisation est un procédé bien plus général que la construction du corps des fractions d'un anneau intègre, et cette généralité, loin d'être gratuite, rend des services considérables notamment en algèbre commutative et en géométrie algébrique. Au niveau de ce cours, on se contentera de développer les définitions et propriétés les plus élémentaires en lien avec la localisation, en donnant quelques exemples et en insistant sur le cas particulier du corps des fractions d'un anneau intègre. Quelques autres propriétés seront vues en TD.

5.1 Un exemple

Commençons par un exemple (qui peut être sauté en première lecture) destiné à éclaircir la dénomination même du procédé de localisation, laquelle est d'inspiration géométrique, voire topologique.

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et mettons que l'on souhaite étudier uniquement des propriétés de nature locale des fonctions continues au voisinage de x_0 , par exemple décider si une telle fonction est dérivable en x_0 . L'ensemble des fonctions continues au voisinage de x_0 est-il un objet d'étude naturel pour ce type de propriétés ? Pas vraiment, et au moins pour deux raisons. Tout d'abord, cet ensemble n'a pas de structure algébrique naturelle (on ne peut pas a priori ajouter ou multiplier deux fonctions continues au voisinage de x_0 car elles ne sont pas nécessairement définies sur le même ensemble) ce qui ne le rend pas très pratique à manipuler. Ensuite les objets de cet ensemble restent en un sens de nature trop globale. Ainsi si I est un intervalle ouvert contenant x_0 (aussi « petit » soit-il) et $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, f contient encore une « énorme » quantité d'informations dont on n'a que faire si on s'intéresse uniquement aux propriétés de nature locale en x_0 . Plus précisément, ce que fait f sur le complémentaire de n'importe quel intervalle ouvert K , aussi « petit » soit-il, contenant x_0 et contenu dans I , ne nous intéresse absolument pas.

On peut cependant retrouver à la fois une structure algébrique et une localité « authentique » via la construction suivante : on considère l'ensemble des couples (I, f) , où I est un intervalle ouvert contenant x_0 et $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, sur lequel on définit une relation d'équivalence \sim en décrétant que $(I, f) \sim (J, g)$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert $K \subset I \cap J$ contenant x_0 et tel que $f|_K = g|_K$. On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence. On note $\overline{(I, f)}$ la classe de (I, f) dans l'ensemble quotient. Sur

l'ensemble quotient, on définit une addition et une multiplication ainsi : pour tout intervalle ouvert I (resp. J) contenant x_0 et toute fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $g: J \rightarrow \mathbf{R}$), on pose

$$\overline{(I, f)} + \overline{(J, g)} = \overline{(I \cap J, f|_{I \cap J} + g|_{I \cap J})}$$

et

$$\overline{(I, f)} \times \overline{(J, g)} = \overline{(I \cap J, f|_{I \cap J} \times g|_{I \cap J})}.$$

On vérifie que ces opérations sont bien définies et munissent l'ensemble quotient d'une structure d'anneau (en fait de \mathbf{R} -algèbre). Cet anneau, noté $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$ (attention, ce n'est pas une notation standard), est appelé l'anneau des germes de fonctions continues en x_0 .

Pour tout intervalle ouvert I de \mathbf{R} contenant x_0 , l'application

$$\varphi_I: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(x_0, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & \overline{(I, f)} \end{array}$$

qui à une fonction f associe son « germe » en x_0 est un morphisme d'anneaux. On a par ailleurs la propriété remarquable suivante : tout élément f de $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ tel que $f(x_0) \neq 0$ s'envoie par φ_I sur un élément inversible de $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$. En effet, si $f(x_0) \neq 0$, on peut trouver $J \subset I$ un intervalle ouvert contenant x_0 et tel que $g := f|_J$ ne s'annule pas. Alors $\overline{(I, f)} = \overline{(J, g)}$; or $\overline{(J, g)}$ est clairement inversible, d'inverse $\overline{(J, \frac{1}{g})}$.

Ceci montre que dans cet anneau « local » des germes $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$ certains éléments d'anneaux plus « globaux » vont devenir inversibles. En fait, en un sens qui sera rendu précis dans ce qui suit, construire $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$, ce qui du point de vue topologique revient à « localiser » les fonctions continues au voisinage de x_0 , revient exactement, du point de vue algébrique, à « forcer » toutes les fonctions de $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ qui ne s'annulent pas en x_0 à devenir inversibles. Ceci est à l'origine du nom de *localisation* attribué au procédé purement algébrique décrit plus en détails ci-dessous et consistant à « forcer » certains éléments d'un anneau à devenir inversibles.

5.2 Définition et propriétés élémentaires du localisé

Définition 1. Soit A un anneau. Une partie S de A est dite *multiplicative* si $1_A \in S$ et si pour tous $s, s' \in S$ alors le produit ss' est encore dans S .

Exemple. Si $a \in A$, $S = \{a^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une partie multiplicative de A .

Si \mathfrak{p} est un idéal premier de A , $A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de A . En particulier si A est intègre, $A \setminus \{0\}$ est une partie multiplicative de A .

L'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des diviseurs de zéros est une partie multiplicative de A .

Remarque. Si S est une partie multiplicative de A ,

$$\mathcal{I}_S = \{a \in A, \exists s \in S, as = 0\}$$

est un idéal de A .

Localiser A par rapport à une partie multiplicative S , c'est construire un nouvel anneau où tous les éléments de S deviennent inversibles, de sorte que cet anneau soit « le plus petit possible » en un sens pour cette propriété. Dans de nombreux cas d'applications, ce nouvel anneau contiendra A comme sous-anneau, mais ça n'est pas non plus systématique, et de manière générale cela vaudra si et seulement si l'idéal \mathcal{I}_S ci-dessus est nul.

Noter aussi qu'on ne demande pas a priori que S ne contienne pas 0_A . Cependant, dans ce cas, le localisé sera l'anneau nul (ce qui se comprend bien intuitivement : l'anneau nul est le seul anneau A où 0_A est inversible).

Théorème 2. *Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A .*

1. *Il existe un anneau B et un morphisme d'anneaux $\varphi: A \rightarrow B$ vérifiant les propriétés suivantes :*
 - *on a $\varphi(S) \subset B^\times$;*
 - *soit C un anneau et $\psi: A \rightarrow C$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi(S) \subset C^\times$; alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\theta: B \rightarrow C$ tel que $\psi = \theta\varphi$.*
2. *Un tel couple (B, φ) est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire : soit B' un anneau et $\varphi': A \rightarrow B'$ un morphisme d'anneaux vérifiant les propriétés suivantes :*
 - *on a $\varphi'(S) \subset (B')^\times$;*
 - *soit C un anneau et $\psi: A \rightarrow C$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi(S) \subset C^\times$; alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\theta: B' \rightarrow C$ tel que $\psi = \theta\varphi'$.**Alors il existe un unique isomorphisme d'anneaux $\gamma: B \rightarrow B'$ tel que $\gamma\varphi = \varphi'$.*

Remarque. Si (B, φ) est un couple vérifiant les propriétés de l'énoncé, on remarque aussitôt que l'idéal \mathcal{I}_S décrit dans la remarque ci-dessus est inclus dans le noyau de φ . En effet, si $a \in A$ et $s \in S$ vérifient $as = 0$, alors $\varphi(a)\varphi(s) = 0$, mais comme $\varphi(s)$ est inversible on en déduit $\varphi(a) = 0$.

Si (B, φ) est un couple vérifiant les propriétés de l'énoncé, B est appelé **le localisé de A par rapport à S** et sera noté $S^{-1}A$; φ est appelé **le morphisme de localisation**. Les articles définis sont justifiés par le résultat d'unicité à isomorphisme unique près. Il est à noter qu'on aurait pu énoncer le théorème sous une forme équivalente en utilisant le langage des A -algèbres (rappelons que la donnée d'un anneau B et d'un morphisme d'anneaux $\varphi: A \rightarrow B$ correspond exactement à la donnée d'une A -algèbre). En particulier $S^{-1}A$ est naturellement muni d'une structure de A -algèbre.

On peut alors reformuler une partie du théorème 2 de la façon suivante.

Théorème 3. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE L'ANNEAU LOCALISÉ

Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A et $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$ le morphisme de localisation.

Soit C un anneau et $\psi: A \rightarrow C$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi(S) \subset C^\times$; alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\theta: S^{-1}A \rightarrow C$ tel que $\psi = \theta\varphi$.

Démonstration. (du théorème 2). Elle sera donnée dans l'amphi, modulo quelques détails de vérification fastidieuse mais sans difficulté. On motive ici la construction qui sera décrite.

L'idée intuitive est de construire B comme l'ensemble des « fractions symboliques » $\frac{a}{s}$ avec $a \in A$ et $s \in S$, de sorte que le morphisme de localisation sera donné par $a \mapsto \frac{a}{1}$. Basiquement, il faut bien comprendre ici la notion de fraction au sens « naturel », avec les règles de calcul associées. En particulier, si $a, a' \in A$ et $s, s' \in S$, on veut avoir $\frac{s}{s} = 1$, $\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$ (en particulier $\frac{as'}{ss'} = \frac{a}{s}$) et $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$. Cependant, en raison de la possible présence dans S de diviseurs de zéro, il faut faire un peu attention avec la règle du produit en croix : la condition $as' - a's = 0$ ne sera en général qu'une condition *suffisante* pour l'égalité $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$.

En effet, supposons que $a \in A$ soit non nul et que $s \in S$ vérifie $sa = 0$. Comme on l'a déjà remarqué, l'image de a dans le localisé, c'est-à-dire $\frac{a}{1}$ est alors nécessairement nulle, c'est-à-dire égale à $\frac{0}{1}$. Mais on n'a pas $a \times 1 = 0 \times 1$. Plus généralement si $a, a' \in A$ et $s, s', t \in S$ sont tels que $t(as' - a's) = 0$ alors on doit avoir $\frac{as'}{1} - \frac{a's}{1} = 0$ soit, en multipliant par $\frac{1}{ss'}$, $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, et ceci que le produit en croix $as' - a's$ soit nul ou non. □

Exemple. On revient sur l'exemple introductif. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et I un intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant x_0 . Soit

$$\mathcal{I}_{x_0} := \{x_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R}), \quad f(x_0) = 0\}.$$

Alors \mathcal{I}_{x_0} est un idéal maximal de $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$. Soit $S = \mathcal{C}(I, \mathbf{R}) \setminus \mathcal{I}_{x_0}$. Alors $S^{-1}\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$ des germes de fonctions continues en x_0 , et le morphisme de localisation est $f \mapsto (I, f)$.

Théorème 4. *Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A . Soit $\varphi: A \rightarrow S^{-1}(A)$ le morphisme de localisation. Alors*

$$\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{I}_S = \{a \in A, \quad \exists s \in S, \quad sa = 0\}.$$

En particulier

1. *si A est intègre et S ne contient pas 0_A , le morphisme de localisation est injectif;*
2. *$S^{-1}A$ est l'anneau nul si et seulement si S contient 0_A .*

Exemple. Soit A et B des anneaux. Alors $S := A^\times \times \{0_B, 1_B\}$ est une partie multiplicative de $A \times B$ et on a $\mathcal{I}_S = \{0\} \times B$. Le morphisme de localisation est le morphisme de projection $A \times B \rightarrow A$. En fait, on peut dans ce qui précède remplacer $\{0_B, 1_B\}$ par n'importe quelle partie multiplicative de B qui contient 0_B .

Remarque. Si $a \in A$, on a souvent tendance à noter $\frac{a}{1_A} = a$ l'image de a dans $S^{-1}A$. Il faut bien réaliser qu'une telle notation est dangereuse dès que le morphisme de localisation n'est pas injectif. En particulier a , en tant qu'élément du localisé, peut être nul sans que a , en tant qu'élément de A , soit nécessairement nul.

Par contre, si le morphisme de localisation est injectif (par exemple si A est intègre et S ne contient pas 0_A), A s'identifie à un sous-anneau de $S^{-1}A$, et la notation ci-dessus se justifie pleinement.

Dans le cas d'un anneau intègre dont on connaît un surcorps, on a une construction plus directe du localisé.

Théorème 5. *Soit A un anneau intègre et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0_A . Soit \mathbf{K} un corps contenant A comme sous-anneau. Soit*

$$B = \left\{ \frac{a}{s} \right\}_{(a,s) \in A \times S} \subset \mathbf{K}.$$

Alors B est un sous-anneau de \mathbf{K} contenant A . En outre $B = S^{-1}A$ et le morphisme de localisation est le morphisme déduit de l'inclusion de A dans B .

Exemple. Soit p un nombre premier et

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Q}.$$

Alors $\mathbf{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbf{Z}$, où S est la partie multiplicative $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$.

Exemple. Soit x un entier non nul et

$$\mathbf{Z} \left[\frac{1}{x} \right] := \left\{ \frac{a}{x^n} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{Q}.$$

Alors $\mathbf{Z} \left[\frac{1}{x} \right] = S^{-1}\mathbf{Z}$, où S est la partie multiplicative $\{x^n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

5.3 Le corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème 6. *Soit A un anneau intègre et $S = A \setminus \{0\}$. Alors le localisé $S^{-1}A$ est un corps. On l'appelle le corps des fractions de l'anneau intègre A , et on le note $\text{Frac}(A)$.*

Exemple. Soit p un nombre premier et x un entier non nul. On a

$$\text{Frac}(\mathbf{Z}) = \text{Frac}(\mathbf{Z}_{(p)}) = \text{Frac} \left(\mathbf{Z} \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \mathbf{Q}.$$

Exemple. On a

$$\text{Frac}(\mathbf{Z}[i]) = \mathbf{Q}[i] = \{a + bi\}_{(a,b) \in \mathbf{Q}}.$$

Exemple. Si \mathbf{K} est un corps, le corps des fractions de $\mathbf{K}[X]$ s'appelle le corps des fractions rationnelles en une indéterminée à coefficients dans \mathbf{K} et est noté $\mathbf{K}(X)$.

Le corps des fractions de $\mathbf{K}[[X]]$ s'appelle le corps des séries de Laurent à coefficient dans \mathbf{K} et est noté $\mathbf{K}((X))$.

Les corps des fractions d'anneaux intègres sont des exemples particuliers de localisés et à ce titre vérifient la propriété universelle du localisé. Cependant, dans le cas des corps des fractions, cette propriété universelle peut se reformuler de la manière légèrement différente suivante.

Théorème 7. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DU CORPS DES FRACTIONS

Soit A un anneau intègre.

1. *Soit \mathbf{L} un corps et $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$ un morphisme d'anneaux injectif. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\theta: \text{Frac}(A) \rightarrow \mathbf{L}$ tel que $\psi = \theta\varphi$*
2. *Soit \mathbf{K} un corps et $\varphi: A \rightarrow \mathbf{K}$ un morphisme d'anneaux injectif. On suppose que le couple (\mathbf{K}, φ) vérifie la propriété suivante : pour tout corps \mathbf{L} et tout morphisme d'anneaux injectif $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$, il existe un unique morphisme de corps $\theta: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ tel que $\psi = \theta\varphi$.*

Alors \mathbf{K} est le corps des fractions de A et φ est le morphisme de localisation, en d'autres termes le morphisme déduit de l'inclusion naturelle de A dans $\text{Frac}(A)$.

De manière un peu plus informelle, ce théorème dit que le corps des fractions d'un anneau intègre A est caractérisé de la manière suivante : c'est un corps \mathbf{K} qui contient A et tel que tout corps \mathbf{L} qui contient A contient aussi \mathbf{K} .

Démonstration. Soit \mathbf{L} un corps et $\psi: A \rightarrow \mathbf{L}$ un morphisme d'anneaux injectif. En particulier, $\psi(A \setminus \{0\}) \subset \mathbf{L} \setminus \{0\} = \mathbf{L}^\times$. D'après la propriété universelle du localisé, existe un unique morphisme d'anneaux $\theta: \text{Frac}(A) \rightarrow \mathbf{L}$ tel que $\psi = \theta\varphi$.

Supposons à présent que le couple (\mathbf{K}, φ) vérifie les propriétés de la seconde partie de l'énoncé. Montrons que (\mathbf{K}, φ) vérifie la propriété universelle du localisé. Soit $\psi: A \rightarrow C$ un morphisme d'anneaux tel que $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C^\times$. Si C est l'anneau nul, il existe bien un unique morphisme $\theta: \mathbf{K} \rightarrow C$ tel que $\theta\varphi = \psi$: c'est l'unique morphisme de \mathbf{K} vers l'anneau nul.

Supposons à présent que C n'est pas l'anneau nul. En particulier on a $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C \setminus \{0\}$, donc ψ est injectif. Soit $B = \psi(A)$. C'est un sous-anneau de C . On note $\iota: B \rightarrow C$ le morphisme déduit de l'inclusion de B dans C . Comme $\psi(A \setminus \{0\}) \subset C^\times$, B est en fait un sous-corps de C . Notant $\tilde{\psi}: A \rightarrow B$ le morphisme induit, on sait par hypothèse qu'il existe un unique morphisme $\tilde{\theta}: \mathbf{K} \rightarrow B$ tel que $\tilde{\theta}\varphi = \tilde{\psi}$. En posant $\theta = \iota\tilde{\theta}$ et en composant par ι , on obtient $\theta\varphi = \psi$. Mais par ailleurs tout morphisme $\theta': \mathbf{K} \rightarrow C$ tel que $\theta'\varphi = \psi$ a son image incluse dans $\psi(A) = B$, et s'écrit donc $\iota\theta'$, où $\theta': \mathbf{K} \rightarrow B$ vérifie $\theta'\varphi = \tilde{\psi}$. Ceci montre l'unicité de $\theta: \mathbf{K} \rightarrow C$ vérifiant $\theta\varphi = \psi$ et achève la démonstration. \square

Exemple. Si \mathbf{K} est un corps, la composition des morphismes d'inclusion $\mathbf{K}[X] \rightarrow \mathbf{K}[[X]]$ et $\mathbf{K}[[X]] \rightarrow \mathbf{K}((X))$ induit un morphisme de corps $\iota: \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}((X))$. Voici comment on peut l'expliciter : soit F un élément de $\mathbf{K}(X)$, que l'on écrit $F = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. Soit $n \in \mathbf{N}$ la plus grande puissance de X divisant Q . On peut alors écrire $Q = X^n R$, avec $R \in \mathbf{K}[X]$ et $R(0) \neq 0$. D'après l'exercice 5 de la feuille 1, R est un élément inversible

de $\mathbf{K}[[X]] \subset \mathbf{K}((X))$. Ainsi $\frac{1}{X^n}PR^{-1}$ est un élément bien défini de $\mathbf{K}((X))$, et correspond à l'image de F par ι .

5.4 Sur les usages en matière de notations

Nous terminons par quelques remarques concernant les notations pour les anneaux localisés. Outre la notation générique $S^{-1}A$, d'autres notations peuvent être utilisées lorsque S a une forme particulière.

On a déjà vu la notation $\text{Frac}(A)$ lorsque A est intègre et $S = A \setminus \{0\}$. Cette notation est parfois aussi utilisée lorsque S est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas diviseurs de zéro (ici A n'est plus nécessairement intègre) ; attention, dans ce cas plus général $\text{Frac}(A)$ n'est pas nécessairement un corps ; on l'appelle *l'anneau total des fractions* de A .

Lorsque \mathcal{I} est un idéal premier de A et $S = A \setminus \mathcal{I}$, $S^{-1}A$ est souvent noté $A_{\mathcal{I}}$. Ceci se retrouve dans la notation $\mathbf{Z}_{(p)}$ (p nombre premier), où (p) peut être vue comme une notation condensée de l'idéal $p\mathbf{Z}$. (on aurait pu aussi utiliser la notation $\mathbf{Z}_{\langle p \rangle}$, plus cohérente avec les autres notations utilisées dans ce cours).

Lorsque S est de la forme $\{a^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ où $a \in A$, $S^{-1}A$ est souvent noté A_a . Attention, dans certains cas, cette notation entre en conflit avec d'autres notations répandues. Par exemple, si p est un nombre premier, \mathbf{Z}_p désigne en général ce qu'on appelle l'anneau des entiers p -adiques, qui est distinct du localisé de \mathbf{Z} par rapport à $\{p^n\}_{n \in \mathbf{N}}$. On peut également trouver la notation $A\left[\frac{1}{a}\right]$, déjà rencontrée pour l'anneau $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ (x un entier non nul). Ceci se justifie par le fait que lorsque A est intègre et $a \neq 0$, $S^{-1}A$ s'identifie à l'image dans $\text{Frac}(A)$ de l'unique morphisme de A -algèbre de $A[X]$ vers $\text{Frac}(A)$ qui envoie X sur $\frac{1}{a}$.