

Feuille de TD n°2

Exercice 1

Soit A un anneau et a un élément de A . Montrer que le sous-anneau de A engendré par $\{a\}$ est $\mathbf{Z}[a]$ (image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \rightarrow A$ qui envoie X sur a). Généraliser au sous-anneau engendré par une partie finie S de A .

Exercice 2

Soit E un ensemble et $(A_e)_{e \in E}$ une famille d'anneaux indexée par E , $B := \prod_{e \in E} A_e$ l'anneau produit. Pour tout $e \in E$, on note $\pi_e: B \rightarrow A_e$ le morphisme d'anneaux donné par la projection sur A_e . Soit C un anneau. Montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, B) &\longrightarrow \prod_{e \in E} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, A_e) \\ \varphi &\longmapsto (\pi_e \circ \varphi)_{e \in E} \end{aligned} .$$

Exercice 3

1. Soit n un entier positif. Décrire tous les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et les relations d'inclusion entre ces idéaux.
2. Soit \mathbf{K} un corps. Décrire tous les idéaux de $\mathbf{K}[X]/\langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle$ et les relations d'inclusion entre ces idéaux.

Exercice 4

On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

1. Montrer que cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication ponctuelle, est un anneau.
2. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f(x_0) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
3. Soit

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \forall n \in \mathbf{N}, f^{(n)}(x_0) = 0\}$$

Montrer que \mathcal{I} est un idéal premier non nul de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (idéal des fonctions « plates » en x_0), et construire un morphisme injectif de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})/\mathcal{I}$ vers $\mathbf{R}[[X]]$. *Note* : on peut en fait construire un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})/\mathcal{I}$ sur $\mathbf{R}[[X]]$ (théorème de Borel).

4. (si vous connaissez la notion de fonction holomorphe) Que se passe-t-il si on s'intéresse aux objets analogues quand on remplace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par l'anneau des fonctions holomorphes sur \mathbf{C} ?

Exercice 5

On désigne par i un élément de \mathbf{C} tel que $i^2 = -1$. Soit $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ l'image dans \mathbf{C} de l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{C}$ qui envoie X sur $i\sqrt{3}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ est un anneau intègre isomorphe à $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 + 3 \rangle$ et que

$$\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3}\}_{(a,b) \in \mathbf{Z}^2}.$$

2. Montrer que l'application

$$N: \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[i\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ z & \longmapsto & z\bar{z} \end{array}$$

est bien définie et vérifie

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]^2, \quad N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2).$$

En déduire les éléments de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]^\times$.

3. Montrer que l'équation

$$a^2 + 3b^2 = 2, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2$$

n'a pas de solution. En déduire que 2 est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$.

4. Montrer que $2\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ de deux façons différentes :

- (a) en calculant le quotient $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]/2\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$;
- (b) en utilisant la relation $4 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$.

Exercice 6

Soit p un nombre premier et

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}}$$

(cf. l'exercice 7.3 de la feuille 1). Décrire l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Combien y a-t-il de classes d'éléments irréductibles pour la relation d'association? Énoncer et démontrer un théorème de « factorisation unique » dans $\mathbf{Z}_{(p)}$.

Dans cet exercice (et l'exercice 7.3 de la feuille 1) on pourra avoir intérêt à considérer la fonction

$$\nu_p: \mathbf{Z}_{(p)} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$$

telle que $\nu_p(0) = +\infty$ et qui à $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}_{(p)} \setminus \{0\}$ associe le plus grand entier n tel que p^n divise a (« valuation p -adique de a »). On pourra démontrer que pour tous $x, y \in \mathbf{Z}_{(p)}$ on a

$$\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$$

$$\text{et } \nu_p(x + y) \geq \min(\nu_p(x), \nu_p(y)) \text{ avec égalité si } \nu_p(x) \neq \nu_p(y).$$

On pourra caractériser $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$ en termes de ν_p .

Exercice 7

Soit x un entier non nul et $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers \mathbf{Q} envoyant X sur $\frac{1}{x}$ (cf. l'exercice 7.2 de la feuille 1). Décrire l'ensemble des classes d'éléments irréductibles pour la relation d'association. Énoncer et démontrer un théorème de « factorisation unique » dans $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$

Exercice 8

Résoudre l'équation $x^3 = 2$, $x \in A$ où A désigne successivement l'un des anneaux suivants (et 2 désigne l'image de 2 dans A par l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z} \rightarrow A$) :

$$\mathbf{R}, \quad \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}[X]/\langle X^3 - 2 \rangle, \quad \mathbf{C}, \quad \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \quad (n \in \{5, 10, 35, 25, 125\})$$

Exercice 9

Pour tout anneau A , on note $\text{car}(A) \in \mathbf{N}$ la caractéristique de A .

1. Soit A un anneau et n un entier positif. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) A est de caractéristique n ;
 - (b) (si $n > 0$) 1_A est d'ordre n en tant qu'élément du groupe $(A, +)$;
 - (c) A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
2. Donner les caractéristiques de l'anneau nul, de \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ($n \in \mathbf{N}$).
3. Montrer que la caractéristique d'un anneau intègre est soit nulle, soit un nombre premier.
4. Soit A un anneau et B un sous anneau de A . Montrer que $\text{car}(A) = \text{car}(B)$.
5. Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $\text{car}(B)$ divise $\text{car}(A)$.
6. Soit A un anneau. Exprimer $\text{car}(A[X])$ en fonction de $\text{car}(A)$.
7. Soit A et B des anneaux. Exprimer $\text{car}(A \times B)$ en fonction de $\text{car}(A)$ et $\text{car}(B)$.
8. Soit E un ensemble et A un anneau. Exprimer $\text{car}(A^E)$ en fonction de $\text{car}(A)$.
9. Soit E un ensemble et $(A_e)_{e \in E}$ une famille d'anneaux indexée par E . Exprimer $\text{car}(\prod_{e \in E} A_e)$ en fonction des $\text{car}(A_e)$.
10. Soit p un nombre premier et A un anneau de caractéristique p . Montrer que $x \mapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux. Donner un exemple d'un anneau de caractéristique 4 pour lequel $x \mapsto x^4$ n'est pas un morphisme d'anneaux.

Exercice 10

On désigne par i un élément de \mathbf{C} tel que $i^2 = -1$. Soit $\mathbf{Z}[i]$ l'image de l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{C}$ qui envoie X sur i (cf. l'exercice 7.1 de la feuille 1).

1. Soit p un nombre premier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes, et qu'elles sont entraînées par la condition « p n'est pas un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$ ».
 - (a) $p\mathbf{Z}[i]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbf{Z}[i]$;
 - (b) -1 est un carré modulo p .
2. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$. Montrer que $z \in \mathbf{Z}[i]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$ (cf. l'exercice 7.1 de la feuille 1).
3. Soit $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i]$ tels que $N(z_1) = N(z_2)$ et z_1 divise z_2 . Montrer que z_1 et z_2 sont associés.
4. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$.

5. Soit p un nombre premier tel que p est une somme de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$. Montrer que -1 est un carré modulo p , et que p n'est pas un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$.
6. On admet (provisoirement) la propriété (\mathcal{P}) suivante : soit $(a, b, c) \in \mathbf{Z}[i]^3$; on suppose que a et b sont irréductibles, non associés, et divisent c ; alors ab divise c . Soit p un nombre premier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) p n'est pas un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$;
 - (b) $p\mathbf{Z}[i]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbf{Z}[i]$;
 - (c) -1 est un carré modulo p ;
 - (d) p est une somme de deux carrés.
7. Montrer que l'analogue de la propriété (\mathcal{P}) pour $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ est fausse (cf. exercice 5 de cette feuille).

Exercice 11

1. Soit A un anneau et $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ trois idéaux de A , supposé deux à deux étrangers. Montrer que les idéaux \mathcal{I}_1 et $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3$ sont étrangers. En déduire que $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3$ et que le morphisme naturel

$$A \rightarrow A/\mathcal{I}_1 \times A/\mathcal{I}_2 \times A/\mathcal{I}_3$$

est surjectif.

2. Démontrer la version générale du théorème chinois énoncée en cours.
3. Résoudre les systèmes de congruences suivants d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$:

$$(1) \begin{cases} x \equiv 3 & [12] \\ x \equiv 3 & [21] \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \equiv 5 & [15] \\ x \equiv 4 & [14] \\ x \equiv 3 & [13] \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x \equiv 1 & [25] \\ x \equiv 5 & [13] \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x \equiv 1 & [10] \\ x \equiv 5 & [15] \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x \equiv 17 & [21] \\ x \equiv 2 & [6] \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 9x \equiv 2 & [15] \\ x \equiv 6 & [17] \end{cases}$$

Exercice 12

1. Soit A un anneau. On note $\iota: A \rightarrow A[X]$ le morphisme d'anneaux injectif naturel. Soit C un anneau, $\theta \in \text{Hom}_{\text{anneaux}}(A, C)$ et $c \in C$. On suppose que le triplet (C, θ, c) vérifie la propriété suivante : pour tout anneau B , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, B) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B) \times B \\ \varphi &\longmapsto (\varphi \circ \theta, \varphi(c)) \end{aligned}$$

est une bijection. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'anneaux $\psi: A[X] \rightarrow C$ tel que $\psi \circ \iota = \theta$ et qui envoie X sur c .

2. Soit A un anneau, C une A -algèbre et $c \in C$. On suppose que le couple (C, c) vérifie la propriété suivante : pour toute A -algèbre B , l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A\text{-algèbres}}(C, B) & \longrightarrow & B \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(c) \end{array}$$

est une bijection. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de A -algèbres de $A[X]$ vers C qui envoie X sur c .

3. Comparer les deux énoncés.

Exercice 13

Cet exercice vise à mettre en lumière un certain nombre de résultats illustrant le fait que toutes les notions relatives à la théorie des anneaux dans le cours sont (et c'est heureux) en un sens « invariants par isomorphisme d'anneaux ». Certaines définitions utilisées dans cet exercice seront données plus tard dans le cours ; si vous ne les connaissez pas, vous pouvez attendre qu'elles soient données pour revenir ensuite sur les propriétés à démontrer dans cet exercice.

Dans tous les énoncés, A et B sont des anneaux supposés isomorphes, et $\varphi: A \rightarrow B$ est un isomorphisme d'anneaux de A sur B . On demande de montrer les propriétés suivantes.

1. Pour tout a dans A , on a $a \in A^\times$ si et seulement si $\varphi(a) \in B^\times$; en outre φ induit un isomorphisme de groupes de A^\times sur B^\times .
2. Pour tout a dans A , a est irréductible si et seulement si $\varphi(a)$ est irréductible.
3. Pour tout a dans A , a est diviseur de zéro si et seulement si $\varphi(a)$ est diviseur de zéro.
4. Pour tout a dans A , a est nilpotent si et seulement si $\varphi(a)$ est nilpotent.
5. Pour tout idéal \mathcal{I} de A , $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de B , et \mathcal{I} est premier (respectivement maximal) si et seulement si $\varphi(\mathcal{I})$ est premier (respectivement maximal).
6. A est intègre si et seulement si B est intègre.
7. A est réduit si et seulement si B est réduit.
8. A est un corps si et seulement si B est un corps.
9. A est euclidien si et seulement si B est euclidien.
10. A est factoriel si et seulement si B est factoriel.
11. A et B ont même caractéristique.