Université de Rennes 1
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique Année universitaire 2018-2019

Contrôle continu n°1
Mercredi 6 mars 2019, 17h15 – 18h15

La qualité de la rédaction et de l'argumentation entrent dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier toutes les réponses doivent être justifiées. Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Si vous souhaitez utiliser un résultat d'un exercice de TD non énoncé en cours, un tel résultat doit être redémontré.

Question de cours

Soit A un anneau intègre et $a \in A$.

1. Donner la définition de « a est irréductible ».
2. On suppose que l'idéal aA est premier et non nul. Montrer que a est irréductible.

Exercice 1

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on pose

$$\sqrt{I} := \{a \in A, \quad \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad a^n \in I\}.$$

1. Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A qui contient I. L'idéal I est dit *radical* s'il vérifie $\sqrt{I} = I$.
2. Soit I un idéal premier de A. Montrer que I est radical.
3. Soit I et J des idéaux radicaux de A. Montrer que $I \cap J$ est un idéal radical de A.
4. L'idéal $12\mathbf{Z}$ est-il un idéal radical de $\mathbf{Z}$? Même question pour l'idéal $15\mathbf{Z}$.
5. Soit n un entier strictement positif. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n, portant sur la décomposition de n en facteurs premiers, pour que l'idéal $n\mathbf{Z}$ soit radical. En déduire que tout idéal radical propre de $\mathbf{Z}$ est une intersection finie d'idéaux premiers de $\mathbf{Z}$.
6. Soit B et C des anneaux non nuls. Montrer que $\sqrt{0}$ (le radical de l'idéal nul) n'est *pas* un idéal premier de $B \times C$.
7. Donner un exemple d'un anneau A non intègre tel que $\sqrt{0}$ est un idéal premier de A.
8. **(hors-barême)** Donner un exemple d'un anneau A non intègre, non nul, tel que $\sqrt{0}$ n'est *pas* un idéal premier de A et A n'est *pas* isomorphe à un produit $B \times C$, où B et C sont des anneaux non nuls.

Exercice 2

Soit $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ l'image de l'unique morphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{C}$ qui envoie X sur $i\sqrt{2}$. Pour tout $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, on pose $N(z) := z\bar{z}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 2)\mathbf{Z}[X]$.
2. Soit $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$. Montrer que $z \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.
3. 9 est-il un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$? Même question pour 3 et 5.