Propriétés des nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est habituellement défini par un procédé de complétion qui sort du cadre du cours d'Algèbre et géométrie 1. Nous résumons ici, sans démonstration, quelques propriétés de $\mathbb{R}$ qui pourront être utilisées dans le cours. Une partie du vocabulaire introduit (structure de corps, intégrité, relation d'ordre...) est hors programme (en tout cas à ce stade du cours) et est donnée à titre culturel. Cependant les propriétés elles-mêmes doivent êtres connues, et vous devez savoir les utiliser dans vos raisonnements et calculs. La très grande majorité de ces propriétés ont déjà été manipulées au lycée.

1 La structure de corps

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$, appelées *addition* et *multiplication*, qui vérifient les propriétés suivantes.

- L'addition et la multiplication sont *associatives* :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x+y)+z = x+(y+z)$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x\times y)\times z = x\times(y\times z).$$

- L'addition et la multiplication sont *commutatives* :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x+y = y+x$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\times y = y\times x.$$

- L'addition a un (unique) *élément neutre*, noté 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x+0 = 0+x = x.$$

- La multiplication a un (unique) *élément neutre*, non nul, noté 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x\times 1 = 1\times x = x.$$

- Tout nombre réel a un (unique) *élément symétrique* pour l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad x+y = 0$$

  et l'élément symétrique de x pour l'addition, i.e. y dans la formule logique ci-dessus, est noté $-x$ et est appelé l'*opposé* de x. On a $-0 = 0$.

- Tout nombre réel **non nul** a un (unique) *élément symétrique* pour la multiplication :

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \qquad x \times y = 1$$

  et l'élément symétrique de x pour la multiplication est noté x^{-1} et est appelé l'*inverse* de x. Il est forcément non nul lui aussi, et on a $1^{-1} = 1$.
- La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

Le signe $\times$ est souvent omis, lorsque cela ne crée pas d'ambiguïté.

Les propriétés précédentes définissent ce que l'on appelle une *structure de corps* sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

On peut en particulier en déduire que $\mathbb{R}$ est *intègre*, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$, on définit $\frac{x}{y}$ comme étant le réel $x \times y^{-1}$. On a alors les propriété suivantes, qui se déduisent de celles énoncées ci-dessus. (Rappelons que $\mathbb{R}^*$ est une autre manière de noter $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.)

$$\begin{aligned}
\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad & \frac{x}{y} + \frac{x'}{y'} = \frac{xy' + x'y}{yy'} \\
\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad & \frac{x}{y} \times \frac{x'}{y'} = \frac{xx'}{yy'} \\
\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \qquad & \frac{tx}{ty} = \frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel x^n par récurrence : on pose $x^0 := 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} := x \times x^n$. En d'autres termes, pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$x^n := \prod_{i=0}^{n-1} x = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ copies de } x}.$$

Si $x \neq 0$, on définit de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{-n} := \left(x^{-1}\right)^n,$$

de sorte que, si $x \neq 0$, le réel x^n est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ (et même pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ si x et y sont non nuls), on a alors :

$$\begin{aligned}
x^n x^p &= x^{n+p} & \qquad \frac{x^n}{x^p} &= x^{n-p} \text{ si } x \neq 0 \\
(xy)^n &= x^n y^n & \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n} \text{ si } y \neq 0 \\
(x^n)^p &= x^{np}.
\end{aligned}$$

On peut identifier l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ prolongent alors celles de $\mathbb{Q}$.

2 La relation d'ordre

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une *relation d'ordre*, que l'on note $\leqslant$. Autrement dit, on a une propriété $x \leqslant y$, pour x et y des nombres réels, qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs de x et y, et qui vérifie :

- la relation $\leqslant$ est *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$
- elle est *antisymétrique* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$
- elle est *transitive* : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$.

De plus, cette relation d'ordre est *totale*, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

La relation d'ordre de $\mathbb{R}$ est compatible aux opérations $+$ et $\times$. Plus précisément, on a :

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Longrightarrow 0 \leqslant x \times y$.

On peut en déduire les propriétés suivantes.

- $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x \leqslant y) \wedge (x' \leqslant y') \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant -x$
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y) \wedge (0 \leqslant z) \Longrightarrow xz \leqslant yz$
- $0 \leqslant 1$
- $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant x') \wedge (x \leqslant y) \wedge (x' \leqslant y') \Longrightarrow xx' \leqslant yy'$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \quad (0 \leqslant x) \wedge (x \leqslant y) \Longleftrightarrow (0 \leqslant y^{-1}) \wedge (y^{-1} \leqslant x^{-1})$

On peut définir, pour x et y des réels, les propriétés $x \geqslant y$, $x < y$ et $x > y$ comme étant respectivement équivalentes à $y \leqslant x$, $(x \leqslant y) \wedge (x \neq y)$ et $(y \leqslant x) \wedge (x \neq y)$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un *corps totalement ordonné*.

De plus, $\mathbb{R}$ est *archimédien*, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$.

Il existe d'autres corps totalement ordonnés et archimédiens que $\mathbb{R}$, comme par exemple le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, mais on peut démontrer que tout corps totalement ordonné archimédien peut s'identifier à un sous-corps de $\mathbb{R}$.

3 La propriété de la borne supérieure

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, un *majorant* de A est un réel m (pas forcément dans A) tel que :

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant m.$$

S'il existe un majorant de A, alors on dit que A est *majorée*.

Une *borne supérieure* de A est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. (Selon l'ensemble A, il peut ne pas y en avoir.) Autrement dit, une borne supérieure de A est un nombre réel s qui vérifie :

- $\forall x \in A \quad x \leqslant s$
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad \big(y < s \Longrightarrow \exists x \in A \quad y < x\big)$.

Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ vérifie la *propriété de la borne supérieure* : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} \quad (\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leqslant m) \Longrightarrow \\ \exists s \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in A \quad x \leqslant s) \wedge \Big(\forall y \in \mathbb{R} \quad \big(y < s \Longrightarrow \exists x \in A \quad y < x\big)\Big). \end{aligned}$$

On peut définir les notions de minorant et de borne inférieure en remplaçant la relation d'ordre $\leqslant$ par $\geqslant$ (et $<$ par $>$) dans les deux définitions ci-dessus. On peut démontrer (à l'aide de la propriété de la borne supérieure) une propriété de la borne inférieure : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

La propriété de la borne supérieure permet de démontrer (et c'est même équivalent) que toutes les suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}$ convergent.

On peut démontrer que tout corps totalement ordonné, archimédien, et qui vérifie la propriété de la borne supérieure, est isomorphe à $\mathbb{R}$.