Formulaire de géométrie

1 Géométrie affine

1.1 Trois applications fondamentales

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan et par $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On a des applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (A, B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array} \quad \text{(vecteur défini par un couple de points)}$$

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \end{array} \quad \text{(somme de deux vecteurs)}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (\lambda, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \lambda \cdot \overrightarrow{u} \end{array} \quad \text{(produit d'un vecteur par un nombre réel)}$$

Dans ce qui suit on passe en revue les propriétés essentielles de ces applications.

1.2 La structure d'espace vectoriel sur le plan vectoriel

1.2.1 Associativité, commutativité, distributivité

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 \qquad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$
$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^3 \qquad \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$$
$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad 1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$
$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$$
$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$$

1.2.2 Le vecteur nul

Il existe un élément distingué de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, appelé le *vecteur nul* et noté $\overrightarrow{0}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$$

Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est l'unique vecteur vérifiant cette propriété. On a

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad 0 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$
$$\forall A \in \mathcal{P} \qquad \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}.$$

1.2.3 L'opposé d'un vecteur

Pour tout élément $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, il existe un unique élément $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ vérifiant

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Ce vecteur est appelé l'*opposé* du vecteur $\overrightarrow{u}$ et noté $-\overrightarrow{u}$. On a

$$\begin{array}{cc} \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} & -\overrightarrow{u} = (-1) \cdot \overrightarrow{u} \\ \forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 & \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des éléments de $\mathcal{P}$. On pose $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} := \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$

1.3 La relation de Chasles

On a

$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}^3 \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

1.4 Translations

L'application $(A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ est surjective. On a en fait la propriété plus forte suivante: soit $A \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$; il existe alors un unique élément $B \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On pose alors $T_{\overrightarrow{u}(A)} := B$ et on appelle B le *translaté de* A *par le vecteur* $\overrightarrow{u}$. On a donc

$$\begin{array}{ccc} \forall A \in \mathcal{P} & \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} & \overrightarrow{AT_{\overrightarrow{u}}(A)} = \overrightarrow{u} \\ & \forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 & T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \\ \forall (A,B) \in \mathcal{P}^2 & \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} & T_{\overrightarrow{u}}(A) = B \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}. \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. L'application

$$T_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ A & \longmapsto & T_{\overrightarrow{u}}(A) \end{array}$$

est appelée *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$.

On a $T_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 \qquad T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}},$$

autrement dit

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 \qquad \forall A \in \mathcal{P} \qquad T_{\overrightarrow{u}}(T_{\overrightarrow{v}}(A)) = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(A).$$

On en déduit que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, l'application $T_{\overrightarrow{u}}$ est bijective, de bijection réciproque $T_{-\overrightarrow{u}}$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P}) \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & T_{\overrightarrow{u}} \end{array}$$

est injective; en d'autres termes on a

$$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 \qquad T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{v}} \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

Une translation de $\mathcal{P}$ est une application $\tau \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle qu'il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que $\tau = T_{\overrightarrow{u}}$. Un tel vecteur est alors unique d'après la propriété précédente, et est appelé *le* vecteur de la translation τ.

1.5 Vecteurs colinéaires

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On dit que ces vecteurs sont *colinéaires* s'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ avec $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tels que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Pour tout élément $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{u}$ et $\lambda\overrightarrow{u}$ sont colinéaires ; en particulier $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{0}$ sont colinéaires.

1.6 Le plan est de dimension deux

On formalise l'idée intuitive que $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont des objets géométriques de dimension 2.

Une *base* du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est un couple $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ sont des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ non colinéaires.

Il existe des bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Un *repère* du plan est un triplet $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où $O \in \mathcal{P}$ et $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Soit $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors on a

$$\forall\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \exists!(x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \overrightarrow{u} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}$$

$$\forall A \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \exists!(x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad A = T_{x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}}(O)$$

Soit $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère du plan. On notera alors toujours $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

On définit des applications bijectives :

$$(\,.\,,\,.\,)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} := x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} \end{array}$$

$$(\,.\,,\,.\,)_{\mathcal{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y)_{\mathcal{R}} := T_{x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}}(O) \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. L'unique élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ est appelé *coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.*

Soit $A \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. L'unique élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$ tel que $A = (x,y)_{\mathcal{R}}$ est appelé *coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$.*

1.7 Calcul repéré dans le plan

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan. On rappelle que $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ désigne la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{array}{rrr}
 & & (0,0)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0} \\
 & & (0,0)_{\mathcal{R}} = O \\
\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 & \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 & (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} + (z,t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (x+z, y+t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \\
\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 & \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 & (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} - (z,t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (x-z, y-t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \\
\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 & \forall \lambda \in \mathbf{R} & \lambda \cdot (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (\lambda x, \lambda y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \\
\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 & \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 & \overrightarrow{(z,t)_{\mathcal{R}}(x,y)_{\mathcal{R}}} = (x-z, y-t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \\
\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 & \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 & T_{(z,t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}}((x,y)_{\mathcal{R}}) = (x+z, y+t)_{\mathcal{R}}
\end{array}$$

2 Géométrie euclidienne

2.1 Produit scalaire

On désigne toujours par $\mathcal{P}$ le plan et par $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est une application

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{array}{rrr}
 & \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \\
\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^3 & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 & (\lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \\
 & \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0 \\
 & \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}
\end{array}$$

Si $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'un produit scalaire, $\mathcal{P}$ est qualifié de *plan euclidien* et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de *plan vectoriel euclidien.*

2.2 Orthogonalité

On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'un produit scalaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *orthogonaux* si on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

2.3 Norme et distance

On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'un produit scalaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. On pose $\parallel \overrightarrow{u} \parallel = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$ et on appelle ce réel la *norme* du vecteur $\overrightarrow{u}$.

La norme vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} && \parallel \overrightarrow{u} \parallel \geq 0 \\
&\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} && \parallel \overrightarrow{u} \parallel = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \\
&\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} && \parallel \lambda \cdot \overrightarrow{u} \parallel = |\lambda| \parallel \overrightarrow{u} \parallel . \\
&\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 && \parallel \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel \leq \parallel \overrightarrow{u} \parallel + \parallel \overrightarrow{v} \parallel \quad \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 && \parallel \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel^2 = \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 + \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

De cette dernière propriété on déduit le *théorème de Pythagore*: soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ deux vecteurs orthogonaux; on a alors

$$\parallel \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel^2 = \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 + \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2 .$$

Soit $A, B \in \mathcal{P}$. On pose $d(A, B) := \parallel \overrightarrow{AB} \parallel$ et on appelle ce réel la *distance* de A à B. La distance vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2 && d(A, B) = d(B, A) \\
&\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2 && d(A, B) \geq 0 \\
&\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2 && d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\
&\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}^3 && d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C) \quad \text{(Inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

2.4 Repère du plan orthonormé vis-à-vis d'un produit scalaire et expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'un produit scalaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan. On dit que ce repère est *orthonormé* (vis à vis du produit scalaire considéré) si $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$ (en d'autres termes $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux) et $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$.

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé. On a alors

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \cdot (z,t)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = xz + yt$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \| (x,y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad d((x,y)_{\mathcal{R}}, (z,t)_{\mathcal{R}}) = \sqrt{(z-x)^2 + (t-y)^2}$$

3 Extension à l'espace

3.1 Ce qui s'étend mutatis mutandis

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace et par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. De façon similaire au cas du plan, on a des applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array} \quad \text{(vecteur défini par un couple de points)}$$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \end{array} \quad \text{(somme de deux vecteurs)}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ (\lambda, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \lambda \cdot \overrightarrow{u} \end{array} \quad \text{(produit d'un vecteur par un nombre réel)}$$

Certaines propriétés de ces applications, ainsi que la définition d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, sont des décalques immédiats de ce qui a été décrit pour $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Plus précisément, tout ce qui a été défini et énoncé dans les sections 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2 et 2.3 (c'est-à-dire essentiellement tout ce qui n'est pas lié à la définition et à l'utilisation de repères) vaut encore dans le cas de l'espace: il suffit de remplacer partout $\mathcal{P}$ par $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Par contre, les définitions et les propriétés des repères, quoique similaires, sont un peu différentes (les différences traduisent le fait que le plan et l'espace n'ont pas la même dimension) et sont détaillées ci-dessous.

3.2 L'espace est de dimension trois

On formalisation l'idée intuitive que $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont des objets géométriques de dimension 3.

On dit qu'un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une *base* de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont non colinéaires, et en outre la propriété suivante est vérifiée :

$$\text{non}(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{i} + \mu \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}).$$

Il existe des bases de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Un *repère* de l'espace est un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où $O \in \mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathcal{E}$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} & \exists!(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 & \overrightarrow{u} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k} \\ \forall A \in \mathcal{E} & \exists!(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 & A = T_{x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}}(O) \end{array}$$

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère du plan. On notera alors toujours $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

On définit des applications bijectives :

$$(\,.\,,\,.\,,\,.\,)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} := x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k} \end{array}$$

$$(\,.\,,\,.\,,\,.\,)_{\mathcal{R}} : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, z)_{\mathcal{R}} := T_{x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}}(O) \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. L'unique élément (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} = (x, y, z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ est appelé *coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.*

Soit $A \in \mathcal{E}$. L'unique élément (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ tel que $A = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$ est appelé *coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$.*

3.3 Calcul repéré dans l'espace

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. On rappelle que $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ désigne la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$(0,0,0)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$$
$$(0,0,0)_{\mathcal{R}} = O$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \qquad (x,y,z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} + (t,u,v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (x+t, y+u, z+v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \qquad (x,y,z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} - (t,u,v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (x-t, y-u, z-v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \lambda \cdot (x,y,z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \qquad \overrightarrow{(t,u,v)_{\mathcal{R}}(x,y,z)_{\mathcal{R}}} = (x-t, y-u, z-v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \qquad T_{(t,u,v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}}((x,y,z)_{\mathcal{R}}) = (x+t, y+u, z+v)_{\mathcal{R}}$$

3.4 Repère de l'espace orthonormé vis-à-vis d'un produit scalaire et expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni d'un produit scalaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. On dit que ce repère est *orthonormé* (vis à vis du produit scalaire considéré) si $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$, (en d'autres termes $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux) et $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = \| \overrightarrow{k} \| = 1$.

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé. On a alors

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \quad (x,y,z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \cdot (t,u,v)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} = xt + yu + zv$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad \| (x,y,z)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}} \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad \forall (t,u,v) \in \mathbf{R}^3 \quad d((x,y,z)_{\mathcal{R}}, (t,u,v)_{\mathcal{R}}) = \sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2}$$