Université de Rennes 1 *mardi 7 novembre 2017*
UFR mathématiques

Algèbre et Géométrie 1 - contrôle continu - devoir long

(durée 4 heures, les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits)

Il est conseillé de lire *très* attentivement ce qui suit avant de commencer à composer :

- Une importance sera accordée dans la notation à la qualité des raisonnements ainsi qu'au soin apporté à la rédaction et la présentation.
- Le sujet dans sa totalité ne peut être traité correctement dans le temps imparti et le barême en tiendra *largement* compte. Les exercices proposés couvrent une assez large partie du programme, profitez-en pour traiter en priorité les exercices où vous vous sentez le plus à l'aise et tâchez avant tout de bien faire ce que vous faites, plutôt que d'essayer de traiter un maximum de questions.
- En liaison avec le point précédent, on conseille par ailleurs de s'attacher dans la mesure du possible à traiter les exercices choisis dans leur totalité et on déconseille d'essayer de récolter des points deci delà dans le sujet.
- Les questions les plus difficiles sont repérées par le symbole ($\star$).
- Les bénéficiaires d'un tiers-temps auront un barême adapté.

1 Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Thalès.

2 Exercice : un peu de calcul, d'équations, d'inéquations

1. Exprimer la quantité suivante sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{3} + \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{6}{11-6}} \times \frac{8}{5}$$

2. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$|x - 4| + |4 - 2x| \leq 2$$

3. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $-3 - 4i$.
4. Résoudre l'équation du second degré d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - 2z(5 + 4i) + 4(3 + 11i) = 0.$$

5. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^6 + 1$.
6. Déterminer le domaine de définition de la fonction d'une variable réelle définie par la formule

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{(x-1)(x+2)}\right)$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^4(x)$.

3 Exercice : avec des coefficients binomiaux

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Si k est un entier tel que $0 \leq k \leq n$, on rappelle que $\binom{n}{k}$, noté aussi C_n^k, désigne le coefficient binomial « k parmi n », autrement dit le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.
   (a) Soit a et b des nombres complexes. Rappeler la formule du binôme de Newton donnant l'expression de $(a+b)^n$.
   (b) En choisissant adéquatement a et b, en déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

   Indication : on pourra dériver le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $N \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$; en effectuant le changement d'indice « $\ell = n - k$ » montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. ($\star$) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{n} k^p ;$$

   en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,0) = n+1$.
   (a) Soit $n, p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton et la question 2, montrer la relation

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} S(n,q).$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique élément P_3 de $\mathbb{R}[X]$ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S(n,3) = P_3(n)$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_p \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,p) = P_p(n)$. Expliciter P_4.

4 Exercice : fonctions surjectives

1. Soit E et F des ensembles et $f\colon E \to F$ une application. Définir « f est surjective ».
2. On considère l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = |n|$. L'application f est-elle surjective ? Déterminer une application $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Une telle application g est-elle unique ? A-t-on $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$?
3. Soit E, F et G des ensembles. Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ des applications. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.

4. ($\star$) Soit E et F des ensembles, $f\colon E \to F$ une application.
   (a) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
   (b) On suppose qu'il existe une unique application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrer que f est bijective.

5 Problème : une promenade autour d'un cercle

On note $\mathcal{P}$ le plan affine, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel correspondant. On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{B} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, fixé une bonne fois pour toutes, ce qui permet d'identifier $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à $\mathbb{R}^2$. Ainsi, quand on écrit $M = (\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, avec α, β, x_u, y_u des réels, cela signifie que

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{\imath} + \beta \cdot \overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{u} = x_u \cdot \overrightarrow{\imath} + y_u \cdot \overrightarrow{\jmath}.$$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Le déterminant du couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est celui calculé dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, et est noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. On note $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 5.1. *Étant donné $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on note $M(z) = (x, y) \in \mathcal{P}$ le point du plan d'affixe z, ce qui définit l'application*

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P}, \\ z \mapsto M(z) = (Re(z), Im(z)). \end{cases}$$

Question préliminaire. i) Étant donnés $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ et $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ deux éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, exprimer $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ à l'aide des coefficients x_u, y_u, x_v, y_v.
ii) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$; exprimer $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||$ en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Q. 1. On définit le sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ par

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \frac{z - 1 - 2i}{3 + 4i} \in \mathbb{R} \right\},$$

et on considère les points $A = (1, 2)$ et $M_1 = (4, 6)$.
i) Représenter les points A et M_1 sur une figure.
ii) Montrer l'équivalence

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \Omega \ \Leftrightarrow\ \det(\overrightarrow{AM(z)}, \overrightarrow{AM_1}) = 0,$$

en rappelant que l'application $z \mapsto M(z)$ est précisée dans la définition 5.1 plus haut.
iii) Soit $M_2 = (-2, -2)$. Montrer qu'il existe $z \in \Omega$ tel que $M_2 = M(z)$.
iv) Soit $\Delta \subset \mathcal{P}$ l'ensemble défini par

$$\Delta = \{M \in \mathcal{P};\ \exists\, z \in \Omega,\ M = M(z)\}.$$

Montrer que les points A et M_1 sont dans Δ.
v) Sur la figure de la question i), dessiner l'ensemble Δ puis déterminer le milieu du segment $[M_1, M_2]$.

Q. 2. Soit
$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P};\ \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0\}.$$
i) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a
$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = MA^2 - 25.$$
ii) En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Q. 3. Soit $M_3 = M(6 + 2i)$.

i) Placer le point M_3 sur la figure de la question 1.

ii) Calculer
$$\det(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_3}$$
et en déduire les valeurs de
$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}) \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}).$$
On rappelle que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on désigne par $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ l'angle géométrique défini par ces vecteurs.

Q. 4. Montrer qu'il existe un unique point $M_4 \in \mathcal{P}$ dont l'affixe a une partie imaginaire positive et qui vérifie
$$\overrightarrow{M_4M_1} \cdot \overrightarrow{M_4M_2} = \overrightarrow{AM_3} \cdot \overrightarrow{AM_4} = 0.$$
Q. 5. Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que n points de $\mathcal{P}$ sont cocycliques si il existe un cercle auquel ces points appartiennent tous. Montrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques.

Q. 6. Représenter sur un nouveau dessin l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe appartient à l'ensemble des nombres complexes défini par
$$\{z \in \mathbb{C};\ |z - 1 - 2i| = 5\}.$$
Q. 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $k = 0, 1 \cdots, n-1$, on considère $P_k \in \mathcal{P}$ défini par
$$P_k = \left(1 + 5\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), 2 + 5\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$
i) Montrer que les n points $(P_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont cocycliques.

ii) Pour $k = 0, 1 \cdots, n-1$, soit $z_k \in \mathbb{C}$ tel que $M(z_k) = P_k$ (on rappelle que l'application $z \mapsto M(z)$ est précisée dans la définition 5.1). Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$.

iii) Dans le cas particulier où $n = 3$, placer sur la figure de la question 6 les points P_0, P_1 et P_2.

Q. 8. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit
$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C};\ \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = \alpha + re^{i\theta}\}.$$
Déterminer l'ensemble $M(\Lambda)$, c'est-à-dire l'image de l'ensemble Λ par l'application $z \mapsto M(z)$ (*c.f.* définition 5.1) ; on précise qu'on demande une description géométrique de cet ensemble.

Q. 9. ($\star$) Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que si les points $M(z_1)$, $M(z_2)$, $M(z_3)$ et $M(z_4)$ sont cocycliques, alors
$$\frac{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right)}{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)} \in \mathbb{R}.$$