Université de Rennes 1,
UFR de mathématique

7 novembre 2017

Algèbre et Géométrie 1 - CC2 long

Corrigé du problème, partie 5 de l'épreuve

Question Préliminaire i) On sait d'après le cours que

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_u y_v - x_v y_u, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_u x_v + y_u y_v.$$

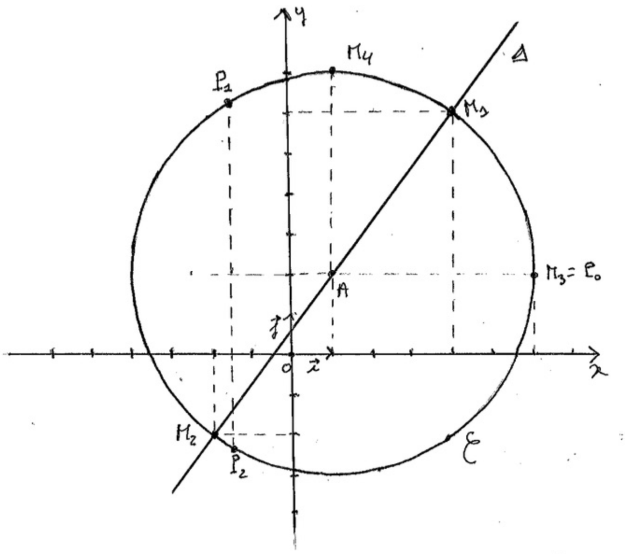
ii) D'après le théorème de Pythagore généralisé,

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v},$$

d'où il résulte

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = \sqrt{||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}.$$

□



Q.1 i) Figure
ii) On peut raisonner ici par conditions nécessaires et suffisantes. En particulier

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R};\ z - 1 - 2i = \lambda(3 + 4i),$$

c'est-à-dire

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R};\ z - z_A = \lambda(z_{M_1} - z_A), \tag{1}$$

en notant z_P l'unique nombre complexe satisfaisant $M(z_P) = P$ pour chaque $P \in \mathcal{P}$. L'assertion (1) est équivalente à

$$z \in \Omega \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{AM(z)} = \lambda\overrightarrow{AM_1}. \tag{2}$$

Autrement dit, $z \in \Omega$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM(z)}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont colinéaires, ce qui est équivalent au fait que leur déterminant soit nul.

iii) $z = -2 - 2i \in \mathbb{C}$ est l'unique nombre complexe qui vérifie $M_2 = M(z)$. Or on a $z - 1 - 2i = -3 - 4i = (-1)(3 + 4i)$, ce qui fait que $z - 1 - 2i = \lambda(3 + 4i)$ avec $\lambda = -1$, autrement dit $z \in \Omega$.

iv) En utilisant les notations introduite dans l'item ii), on observe que

$$\frac{z_A - 1 - 2i}{3+4i} = 0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{z_{M1} - 1 - 2i}{3+4i} = 1 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donc en remarquant de manière immédiate que

$$\Delta = \{M \in \mathbb{C};\ z_M \in \Omega\},$$

on déduit de (3) que $A \in \Delta$, $M \in \Delta$.

v) On tire en particulier de (2) que Δ est la droite qui passe par les points A et M_1. Soit $I = (x_I, y_I)$ le milieu du segment $[M_1, M_2]$. Alors par définition

$$\overrightarrow{M_1 I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1 M_2},$$

ce qui écrit composante par composante conduit aux équations

$$x_I - 4 = \frac{1}{2}(-2-4), \quad y_I - 6 = \frac{1}{2}(-2-6),$$

d'où on tire $x_I = 1$ et $y_I = 2$, autrement dit $I = A$. $\square$

Q.2. i) D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1}, \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_2},$$

ce qui conduit à, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire,

$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}. \tag{4}$$

Par symétrie du pdroduit scalaire, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AM_2} \cdot \overrightarrow{MA}$, et comme A est le milieu de $[M_1, M_2]$, $\overrightarrow{AM_2} = -\overrightarrow{AM_1}$ de sorte que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$. De même, $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = -\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_1} = -AM_1^2 = -25$, où on a utilisé les coordonnées pour le dernier calcul. Comme $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = MA^2$, il résulte de (4)

$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = MA^2 - 25. \tag{5}$$

ii) D'après la définition de $\mathcal{C}$ combinée avec l'égalité (5), on voit que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $MA^2 = 25$, et donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon égal à 5. $\square$

Q.3. i) *c.f.* figure Q1.

ii) On a

$$\overrightarrow{AM_1} = (4-1, 6-2) = (3,4), \quad \overrightarrow{AM_3} = (6-1, 2-2) = (5,0),$$

de sorte que d'après les formules de la question préliminaire,

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_3} = 3 \times 5 + 0 \times 4 = 15, \quad \det(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}) = 3 \times 0 - 4 \times 5 = -20.$$

Par ailleurs, on a $||\overrightarrow{AM_1}|| = ||\overrightarrow{AM_3}|| = 5$, d'où

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}\right) = \frac{\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_3}}{||\overrightarrow{AM_1}|| ||\overrightarrow{AM_3}||} = \frac{3}{5}, \quad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}\right) = \frac{\det(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3})}{||\overrightarrow{AM_1}|| ||\overrightarrow{AM_3}||} = -\frac{4}{5}.$$

$\square$

Q.4. Comme $\overrightarrow{M_4M_1} \cdot \overrightarrow{M_4M_2} = 0$, on déduit de la question 2 que M_4 est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 5. Par ailleurs, comme $\overrightarrow{AM_3} \cdot \overrightarrow{AM_4} = 0$, M_4 est sur la droite qui passe par A et orthogonale à la droite (AM_3). L'intersection de cette droite avec le cercle est constitué exactement des deux points $(1,7)$ et $(1,-3)$. Comme le point recherché est celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive, seul le point $M_4 = (1,7)$ est solution du problème, qui admet donc une et une seule solution. $\square$

Q.5. On sait d'après les questions précédentes que les points M_i, $i = 1 \cdots 4$, sont tous sur le cercle $\mathcal{C}$, et donc sont cocycliques. $\square$

Q.6. On observe que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ |z - 1 - 2i| = 5\}$ représente de nouveau le cercle $\mathcal{C}$. $\square$

Q.7. i) Comme

$$z_{P_k} = z_A + 5e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \tag{6}$$

où $z_A = 1 + 2i$, alors $|z_{P_k} - 1 - 2i| = 5$. Donc d'après la question précédente, les points P_k sont tous sur le cercle $\mathcal{C}$ et par conséquent sont cocycliques.
ii) On pose $z_k = z_{P_k}$. Alors d'après (6) on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = nz_A + 5\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Or on sait d'après le cours que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$, ce qui fait que

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = nz_A.$$

iii) D'un côté, $P_0 = M_3$, et en notant $j = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, on a de l'autre côté,

$$z_{P_1} = z_A + 5j, \quad z_{P_2} = z_A + 5j^2,$$

ce qui permet le placement sur la figure. $\square$

Q.8. On voit que $z \in \Lambda$ si et seulement si $|z - \alpha| = r$, d'où l'on déduit d'après les résultats standards que $M(\Lambda)$ est le cercle de centre $M(\alpha)$ et de rayon r. $\square$

Q.9. On suppose que les points $M(z_1)$, $M(z_2)$, $M(z_3)$ et $M(z_4)$ sont cocycliques. D'après la question précédente, il existe $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$, tels que $z_j = \alpha + re^{i\theta_j}$, pour $j = 1,2,3,4$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)}{\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)} &= \frac{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_4}} \cdot \frac{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\theta_1}{2}} e^{-i\frac{\theta_3}{2}} \left(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3}\right)}{e^{-i\frac{\theta_1}{2}} e^{-i\frac{\theta_4}{2}} \left(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_4}\right)} \cdot \frac{e^{-i\frac{\theta_2}{2}} e^{-i\frac{\theta_4}{2}} \left(e^{i\theta_2} - e^{i\theta_4}\right)}{e^{-i\frac{\theta_2}{2}} e^{-i\frac{\theta_3}{2}} \left(e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}\right)} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta_1-\theta_3}{2}} - e^{-i\frac{\theta_1-\theta_3}{2}}}{e^{i\frac{\theta_1-\theta_4}{2}} - e^{-i\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{\theta_2-\theta_4}{2}} - e^{-i\frac{\theta_2-\theta_4}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}} - e^{-i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}} = \\
&\qquad \frac{\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_4}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)} \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$