Université de Rennes 1
UFR mathématiques

*mardi 7 novembre 2017*

# Algèbre et Géométrie 1 - devoir long

correction des exercices 2,3 et 4

## 1 Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Thalès.

## 2 Exercice : un peu de calcul, d'équations, d'inéquations

1. *Exprimer la quantité suivante sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$\frac{1}{3} + \frac{2+\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{11-6}} \times \frac{8}{5}$$

On a

$$\frac{2+\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{11-6}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{1-\frac{6}{5}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\frac{-1}{5}} = -\frac{25}{2}.$$

Ainsi

$$\frac{2+\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{11-6}} \times \frac{8}{5} = -\frac{25}{2} \times \frac{8}{5} == -\frac{5^2}{2} \times \frac{2\times 4}{5} = -20.$$

Finalement

$$\frac{1}{3} + \frac{2+\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{11-6}} \times \frac{8}{5} = \frac{1}{3} - 20 = \frac{1}{3} - \frac{60}{3} = -\frac{59}{3}.$$

2. *Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$*

$$|x-4| + |4-2x| \leq 2$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $\mathscr{E}(x)$ la propriété $|x-4| + |4-2x| \leq 2$.
Soit $x \in [4, +\infty[$. Alors $x - 4 \geq 0$ et $4 - 2x \leq 0$, d'où

$$\mathscr{E}(x) \Leftrightarrow (x-4) + (2x-4) \leq 2 \Leftrightarrow 3x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3}.$$

On en déduit

$$S_1 := \{x \in [4, +\infty[, \quad \mathscr{E}(x)\} = [4, +\infty[ \cap ]-\infty, \frac{10}{3}] = \varnothing.$$

Soit $x \in [2, 4[$. Alors $x - 4 \leq 0$ et $4 - 2x \leq 0$, d'où

$$\mathscr{E}(x) \Leftrightarrow (4-x) + (2x-4) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Ainsi

$$S_2 := \{x \in [2, 4[, \quad \mathscr{E}(x)\} = [2, +\infty[ \cap ]-\infty, 2] = \{2\}.$$

Soit $x \in ]-\infty, 2[$. Alors $x - 4 \leq 0$ et $4 - 2x \geq 0$, d'où

$$\mathscr{E}(x) \Leftrightarrow (4-x) + (4-2x) \leq 2 \Leftrightarrow 6 \leq 3x \Leftrightarrow 2 \leq x.$$

On a donc

$$S_3 := \{x \in [-\infty, 2[, \quad \mathscr{E}(x)\} = ]-\infty, 2[\cap[2, +\infty[= \varnothing.$$

Finalement, on en déduit

$$\{x \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{E}(x)\} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{2\}.$$

3. *Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe* $-3-4i$.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ tel que
   $$(x+iy)^2 = -3-4i \quad (E_1).$$
   On a donc
   $$x^2 - y^2 + 2ixy = -3-4i$$
   et en identifiant parties réelles et imaginaires, on en tire
   $$x^2 - y^2 = -3 \quad (E_2), \quad 2xy = -4 \quad (E_3).$$
   Par ailleurs, en égalant les modules dans $(E_1)$, on trouve
   $$x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad (E_4).$$
   $(E_2) + (E_4)$ donne $2x^2 = 2$ soit $x^2 = 1$ soit $x \in \{1, -1\}$.
   Par ailleurs $(E_4) - (E_2)$ donne $2y^2 = 8$ soit $y^2 = 4$ d'où $y \in \{2, -2\}$.
   En outre $(E_3)$ nous dit que $x$ et $y$ sont de signe opposé. Donc nécessairement $(x, y) \in \{(1, -2), (-1, 2)\}$.
   Or $(1-2i)^2 = (-1+2i)^2 = 1-4-4i = -3-4i$. Finalement les racines carrées de $-3-4i$ sont $1-2i$ et $-1+2i$.
4. *Résoudre l'équation du second degré d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$
   $$z^2 - 2z(5+4i) + 4(3+11i) = 0.$$
   Le discriminant de cette équation est
   $$\Delta = (2(5+4i))^2 - 4 \times 4(3+11i) = 4(-3-4i).$$
   D'après la question précédentes, les racines carrées de $\Delta$ sont $2(1+2i)$ et $2(-1+2i)$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc
   $$\left\{\frac{2(5+4i)+2(1-2i)}{2}, \frac{2(5+4i)+2(-1+2i)}{2}\right\} = \{6+2i, 4+6i\}.$$
5. *Factoriser dans* $\mathbb{R}[X]$ *et dans* $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $X^6+1$.
   Les racines dans $\mathbb{C}$ de ce polynômes sont les racines 6-èmes de $-1$. La forme exponentielle de $-1$ est $e^{i\pi}$, on en déduit la liste de ses racines 6-èmes
   $$\{e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{6}}\}_{k\in\{0,1,2,3,4,5\}} = \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{5\pi}{6}}\}$$
   Le polynôme $X^6+1$ est de degré 6, unitaire, et possède 6 racines complexes deux à deux distinctes, sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est donc
   $$X^6+1 = \prod_{k=0}^{5}(X - e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{6}}) = (X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{i\frac{\pi}{2}})(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{\pi}{2}})(X-e^{-i\frac{5\pi}{6}}).$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on rassemble les racines conjuguées (rappelons que si $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$)

$$X^6 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{-i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{\pi}{2}})(X - e^{-i\frac{\pi}{2}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{-i\frac{5\pi}{6}})$$

soit

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{6})X + \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2)(X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{2})X + \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2)(X^2 - 2\cos(\frac{5\pi}{6})X + \left|e^{i\frac{5\pi}{6}}\right|^2) \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

6. *Déterminer le domaine de définition de la fonction d'une variable réelle définie par la formule*

$$\ln\left(\frac{e^x - 1}{(x-1)(x+2)}\right)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression est définie si et seulement si $\frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)} > 0$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle, $e^x - 1 = e^x - e^0$ est strictement positif si et seulement si $x > 0$ et strictement négatif si et seulement si $x < 0$. En faisant un tableau de signes, on trouve que le domaine de définition est

$$]-2, 0[\cup]1, +\infty[.$$

7. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser* $\sin^4(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$$

soit

$$\sin^4(x) = \frac{1}{(2i)^4}\left((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right).$$

On en tire

$$\sin^4(x) = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right).$$

soit

$$\sin^4(x) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

# 3 Exercice : avec des coefficients binomiaux

1. *Soit $n \geq 2$ un entier. Si $k$ est un entier tel que $0 \leq k \leq n$, on rappelle que $\binom{n}{k}$, noté aussi $C_n^k$, désigne le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ », autrement dit le nombre de combinaisons de $k$ éléments parmis $n$.*
   (a) *Soit $a$ et $b$ des nombres complexes. Rappeler la formule du binôme de Newton donnant l'expression de $(a+b)^n$.*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

   (b) *En choisissant adéquatement $a$ et $b$, en déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.*

   En prenant $a = b = 1$, on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, 1^{n-k}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

(c) *Déterminer une expression simplifiée de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

*Indication : on pourra dériver le polynôme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k \in \mathbb{R}[X]$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la formule du binôme ci-dessus appliquée avec $a=x$ et $b=1$ donne

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

On a donc

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k.$$

En dérivant, on obtient

$$n(X+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kX^{k-1}.$$

En faisant $X=1$, on obtient

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres complexes et* $N\in\mathbb{N}$. *Déterminer une expression simplifiée de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}-u_k)$.

On a

$$\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=0}^{N}u_{k+1} - \sum_{k=0}^{N}u_k$$

En effectuant le changement d'indice « $\ell = k+1$ » dans la première somme du membre de gauche, on obtient

$$\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{\ell=1}^{N+1}u_\ell - \sum_{k=0}^{N}u_k = \sum_{k=1}^{N+1}u_k - \sum_{k=0}^{N}u_k$$

Finalement

$$\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{N+1}u_k - \sum_{k=0}^{N}u_k = u_{N+1} + \sum_{k=1}^{N}u_k - \sum_{k=1}^{N}u_k - u_0 = u_{N+1}-u_0.$$

*Remarque :* on pouvait aussi démontrer la formule par récurrence sur $N$.

3. *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *; en effectuant le changement d'indice « $\ell = n-k$ » montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Effectuons le changement d'indice « $\ell = n-k$ » dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$. Cela donne

$$\sum_{k=0}^{n}k = \sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$$

Poson $S = \sum_{k=0}^{n} k$. On a donc

$$S = \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - S.$$

On en tire $2S = n(n+1)$ d'où $S = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. *Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ l'énoncé « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Montrons que $\mathcal{H}_0$ est vrai. On a $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6},$$

ce qui montre que $\mathcal{H}_0$ est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vrai. Montrons qu'alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est encore vrai. On a en effet

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2.$$

D'après $\mathcal{H}_n$, on a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\frac{2n^2+n+6n+1}{6}.$$

Or

$$2n^2+n+6n+6 = 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3).$$

Finalement

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

ce qui montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai.
Ainsi, les énoncés $\mathcal{H}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ sont vrais, ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_n$ est vrai.

5. $(\star)$ *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose*

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{n} k^p;$$

*en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,0) = n+1$.*

(a) *Soit $n, p \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton et la question 2, montrer la relation*
$$(n+1)^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} S(n,q).$$
Soit $k$ un entier tel que $0 \leq k \leq n+1$. D'après la formule du binôme de Newton
$$(k+1)^{p+1} = \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} k^q = k^{p+1} + \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} k^q.$$
Ainsi pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n+1$ on a
$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} k^q.$$
En sommant cette égalité pour $k$ allant de 0 à $n$ et en utilisant la question 2 pour le membre de gauche, on obtient
$$(n+1)^{p+1} - 0^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} k^q = \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} \sum_{k=0}^{n} k^q$$
soit
$$(n+1)^{p+1} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} S(n,q).$$

(b) *En déduire qu'il existe un unique élément $P_3$ de $\mathbb{R}[X]$ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S(n,3) = P_3(n)$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait qu'on a $S(n,0) = n+1$, $S(n,1) = \frac{n(n+1)}{2}$ (question 3) et $S(n,2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (question 4).
Par ailleurs en appliquant la question précédente avec $p = 3$, on obtient
$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{q=0}^{3} \binom{4}{q} S(n,q)$$
d'où
$$(n+1)^4 = S(n,0) + 4S(n,1) + 6S(n,2) + 4S(n,3)$$
et finalement
$$S(n,3) = \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)\Big)$$
soit
$$S(n,3) = \frac{1}{4}\left(n^4 + 2\,n^3 + n^2\right) = \frac{1}{4}\left(n^2(n+1)^2\right)$$
Posons donc $P_3 = \frac{1}{4}\left(X^2(X+1)^2\right)$.
Ce qui précède montre qu'on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_3(n) = S(n,3).$$
Si $Q_3$ est un autre polynôme vérifiant cette propriété, l'ensemble des racines de $P_3 - Q_3$ contient $\mathbb{N}$ donc est infini, et donc $P_3 - Q_3$ et le polynôme nul. Ainsi $P_3 = Q_3$.

(c) *Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_p \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,p) = P_p(n)$. Expliciter $P_4$.*

Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_p$ l'énoncé « pour tout entier $q$ compris entre 0 et $q$ il existe un polynôme $P_q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $q+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{q+1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,q) = P_q(n)$ ».

On vérifie que $\mathcal{H}_0$ est vrai, avec $P_0 = n+1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_p$ est vrai. Montrons que $\mathcal{H}_{p+1}$ est vrai. D'après $\mathcal{H}_p$ il suffit de montrer qu'il existe un polynôme $P_{p+1} \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p+2$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+2}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,p+1) = P_{p+1}(n)$. Pour tout entier $q$ compris entre 0 et $q$, soit $P_q$ un polynôme vérifiant les propriétés données par $\mathcal{H}_p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5(a), on a

$$\binom{p+2}{p+1} S(n,p+1) = (n+1)^{p+2} - \sum_{q=0}^{p} \binom{p+2}{q} S(n,q).$$

d'où

$$S(n,p{+}1) = \frac{1}{p+2}\left((n+1)^{p+2} - \sum_{q=0}^{p}\binom{p+2}{q} S(n,q)\right) = \frac{1}{p+2}\left((n+1)^{p+2} - \sum_{q=0}^{p}\binom{p+2}{q} P_q(n)\right).$$

Soit $P_{p+1} \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P_{p+1} = \frac{1}{p+2}\left((X+1)^{p+2} - \sum_{q=0}^{p}\binom{p+2}{q} P_q\right).$$

Ce qui précéde montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{p+1}(n) = S(n,p+1)$.

Par ailleurs, pour tout $q \in \{0,\dots,p\}$, on a $\deg(P_q) = q+1$, donc le degré du polynôme $\sum_{q=0}^{p}\binom{p+2}{q} P_q$ est au plus $p+1$. Comme $(X+1)^{p+2} - X^{p+2}$ est également de degré au plus $p+1$, on en dédduit que $P_{p+1}$ est de degré $p+2$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+2}$.

Ainsi $\mathcal{H}_{p+1}$ est vrai.

On a donc démontré : pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_p \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n,p) = P_p(n)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'unicité de $P_p$ se montre en raisonnant comme pour $P_3$ à la question précédente. Par ailleurs le raisonnement précédent montre en fait la relation

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad P_{p+1} = \frac{1}{p+2}\left((X+1)^{p+2} - \sum_{q=0}^{p}\binom{p+2}{q} P_q\right).$$

On en déduit

$$P_4 = \frac{1}{5}\Big((X+1)^5 - P_0 - 5P_1 - 10P_2 - 10P_3\Big).$$

Tous calculs faits, on en déduit

$$P_4 = \frac{1}{5}X^5 + \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X.$$

## 4 Exercice : fonctions surjectives

1. *Soit $E$ et $F$ des ensembles et $f\colon E \to F$ une application. Définir « $f$ est surjective ».*
   « $f$ est surjective » peut se définir par la propriété suivante :
   $$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$
2. *On considère l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = |n|$. L'application $f$ est-elle surjective ?*
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n$ est positif, on a $n = |n| = f(n)$. Ainsi $n$ admet un antécédent par $f$. Donc $f$ est surjective.
   *Déterminer une application $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.*
   On peut remarquer que si $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est une application, la relation $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est équivalente à
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(n)| = n$$
   ou encore à
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) \in \{n, -n\} \quad (P).$$
   Ainsi par exemple l'application $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = n$ vérifie $(P)$.
   *Une telle application $g$ est-elle unique ?*
   Non ; par exemple l'application $g_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, g_1(n) = -n$ vérifie également $(P)$ et est distincte de l'application $g$ définie ci-dessus (car $g(1) = 1 \neq g_1(1)$).
   *A-t-on $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ ?*
   Non ; on peut le vérifier sur l'exemple qu'on aura exhibé précédemment ; par exemple, avec l'application $g$ définie ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(|n|) = |n|$ ; ainsi $g \circ f(-1) = 1 \neq -1$ donc $g \circ f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.
   On peut montrer aussi ainsi qu'une application $g$ qui vérifie $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ ne peut pas vérifier $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ : si c'était le cas, le cours nous dit que $f$ serait une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ ; or $f(-1) = f(1)$, donc $f$ n'est pas injective.
3. *Soit $E$, $F$ et $G$ des ensembles. Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ des applications. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que $g$ est surjective.*
   Soit $z \in G$. Montrons que $z$ admet un antécédent dans $F$ par $g$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$ soit $g(f(x)) = z$. Posons $y := f(x)$. On a donc $y \in F$ et $g(y) = z$, ce qui termine la démonstration.
4. ($\star$) *Soit $E$ et $F$ des ensembles, $f\colon E \to F$ une application.*
   (a) *Montrer que $f$ est surjective si et seulement s'il existe une application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*
   Supposons qu'il existe une application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. En particulier $f \circ g$ est surjective, et d'après la question précédente $f$ est surjective.
   Supposons $f$ surjective. Soit $y \in F$. Comme $f$ est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On pose alors $g(y) = x$. On a ainsi défini [1] une application $g\colon F \to E$ qui par construction vérifie $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

1. Avec le point de vue intuitif adopté en cours sur les applications, une telle construction peut être effectivement considérée comme valide ; en réalité les choses sont un peu plus compliquées et on a besoin ici en toute rigueur d'un axiome de la théorie des ensembles appelé *axiome du choix* ; en fait la propriété que nous sommes en train de démontrer est l'une des formulations équivalentes de cet axiome.

(b) *On suppose qu'il existe une unique application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $f$ est bijective.*

D'après la question précédente $f$ est surjective. Il reste à montrer que $f$ est injective.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ n'est pas injective. Il existe donc $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Désignons par $y$ cet élément de $F$, si bien que $f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y$. Si on pose $g_1(y) = x_1$ et, pour tout $y' \neq y$, $g_1(y') = g(y')$, on aura bien par construction $f \circ g_1 = \mathrm{Id}_F$. De même, si on pose $g_2(y) = x_2$ et, pour tout $y' \neq y$, $g_2(y') = g(y')$, on aura $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$. Or $g_1 \neq g_2$ car $g_1(y) \neq g_2(y)$. Ceci contredit notre hypothèse initiale. Donc $f$ est injective.

# 5 Problème : une promenade autour d'un cercle

On note $\mathcal{P}$ le plan affine, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel correspondant. On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{B} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, fixé une bonne fois pour toutes, ce qui permet d'identifier $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à $\mathbb{R}^2$. Ainsi, quand on écrit $M = (\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, avec $\alpha$, $\beta$, $x_u$, $y_u$ des réels, cela signifie que

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{\imath} + \beta \overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{u} = x_u \overrightarrow{\imath} + y_v \overrightarrow{\jmath}.$$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Le déterminant du couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est celui calculé dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, et est noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. On note $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 5.1.** *Étant donné $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on note $M(z) = (x, y) \in \mathcal{P}$ le point du plan d'affixe $z$, ce qui définit l'application*

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P}, \\ z \mapsto M(z) = (Re(z), Im(z)). \end{array} \right.$$

**Question préliminaire**. i) Étant donnés $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ et $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ deux éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, exprimer $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ à l'aide des coefficients $x_u, y_u, x_v, y_v$.
ii) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ; exprimer $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||$ en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

**Q. 1**. On définit le sous-ensemble $\Omega$ de $\mathbb{C}$ par

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \frac{z - 1 - 2i}{3 + 4i} \in \mathbb{R} \right\},$$

et on considère les points $A = (1, 2)$ et $M_1 = (4, 6)$.
i) Représenter les points $A$ et $M_1$ sur une figure.
ii) Montrer l'équivalence

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \Omega \ \Leftrightarrow\ \det(\overrightarrow{AM(z)}, \overrightarrow{AM_1}) = 0,$$

en rappelant que l'application $z \mapsto M(z)$ est précisée dans la définition 5.1 plus haut.
iii) Soit $M_2 = (-2, -2)$. Montrer qu'il existe $z \in \Omega$ tel que $M_2 = M(z)$.
iv) Soit $\Delta \subset \mathcal{P}$ l'ensemble défini par

$$\Delta = \{M \in \mathcal{P};\ \exists\, z \in \Omega,\ M = M(z)\}.$$

Montrer que les points $A$ et $M_1$ sont dans $\Delta$.
v) Sur la figure de la question i), dessiner l'ensemble $\Delta$ puis déterminer le milieu du segment $[M_1, M_2]$.

**Q. 2**. Soit
$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P};\ \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0\}.$$
i) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a
$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = MA^2 - 25.$$
ii) En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Q. 3**. Soit $M_3 = M(6 + 2i)$.
i) Placer le point $M_3$ sur la figure de la question 1.
ii) Calculer
$$\det(\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_3}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_3}$$
et en déduire les valeurs de
$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}) \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_3}}).$$
On rappelle que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on désigne par $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ l'angle géométrique défini par ces vecteurs.

**Q. 4**. Montrer qu'il existe un unique point $M_4 \in \mathcal{P}$ dont l'affixe a une partie imaginaire positive et qui vérifie
$$\overrightarrow{M_4M_1} \cdot \overrightarrow{M_4M_2} = \overrightarrow{AM_3} \cdot \overrightarrow{AM_4} = 0.$$

**Q. 5**. Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que $n$ points de $\mathcal{P}$ sont cocycliques si il existe un cercle auquel ces points appartiennent tous. Montrer que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ sont cocycliques.

**Q. 6**. Représenter sur un nouveau dessin l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe appartient à l'ensemble des nombres complexes défini par
$$\{z \in \mathbb{C};\ |z - 1 - 2i| = 5\}.$$

**Q. 7**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $k = 0, 1 \cdots, n-1$, on considère $P_k \in \mathcal{P}$ défini par
$$P_k = \left(1 + 5\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), 2 + 5\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$
i) Montrer que les $n$ points $(P_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont cocycliques.
ii) Pour $k = 0, 1 \cdots, n-1$, soit $z_k \in \mathbb{C}$ tel que $M(z_k) = P_k$ (on rappelle que l'application $z \mapsto M(z)$ est précisée dans la définition 5.1). Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$.
iii) Dans le cas particulier où $n = 3$, placer sur la figure de la question 6 les points $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

**Q. 8**. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit
$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C};\ \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = \alpha + re^{i\theta}\}.$$
Déterminer l'ensemble $M(\Lambda)$, c'est-à-dire l'image de l'ensemble $\Lambda$ par l'application $z \mapsto M(z)$ (*c.f.* définition 5.1) ; on précise qu'on demande une description géométrique de cet ensemble.

**Q. 9**. $(\star)$ Soient $z_1$, $z_2$, $z_3$ et $z_4$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que si les points $M(z_1)$, $M(z_2)$, $M(z_3)$ et $M(z_4)$ sont cocycliques, alors
$$\frac{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right)}{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)} \in \mathbb{R}.$$