Licence de Mathématiques

AG1 : Algèbre et géométrie 1
Épreuve du vendredi 24 Novembre 2017
Début 12h35 - Durée 20 mn

La consultation de document et l'utilisation de calculette ne sont pas autorisées. Il est rappelé qu'en mathématiques, tout résultat doit être référencé ou démontré. Dans tout le sujet, $\mathcal{P}$ désigne le plan affine et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel. On désigne par $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$. Un point $M \in \mathcal{P}$ est identifié à ses coordonnées (x, y) dans ce repère. Par ailleurs, étant donnés n points $A_1, \cdots, A_n$ et n réels $a_1, \cdots, a_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} a_j \neq 0$, on désigne par

$$G = \mathrm{Bar}((A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n))$$

le barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ respectivement.

Cette épreuve est constituée de 3 questions.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée.

Bon courage !

Question 1. Soient $A = (2, -1)$, $B = (-3, 16)$ et

$$C = \mathrm{Bar}((A, -24), (B, 32)).$$

Les points A, B et C sont alignés ?

Question 2. Soit $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (1, 1)$. Soit $\Omega \subset \mathcal{P}$ l'ensemble défini par

$$\Omega = \{M = (x, y) \in \mathcal{P} \ \text{ tel que } \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Enfin, soit $p, a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c + p \neq 0$, et

$$G = \mathrm{Bar}((O, p), (A, a), (B, b), (C, c)).$$

Est-ce que nécessairement $G \in \Omega$?

Question 3. Soient $\overrightarrow{v} = (1, 1)$ et $A = (-1, 3)$. On désigne par $t_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ et par $H_{A,2}$ l'homothétie de centre A et de rapport 2. On considère l'application $t_{\overrightarrow{v}} \circ H_{A,2}$, déterminée par :

$$\forall\, M \in \mathcal{P}, \quad (t_{\overrightarrow{v}} \circ H_{A,2})(M) = t_{\overrightarrow{v}}(H_{A,2}(M)).$$

Est-ce que $t_{\overrightarrow{v}} \circ H_{A,2}$ est une homothétie ?