UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Corrigé de l'interrogation 1

Exercice 1

Dans cet exercice, A, B et C sont trois assertions, vraies ou fausses.
Montrer que la formule suivante est une tautologie.

$$(A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C) \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C)$$

Procédons par double implication.

- Supposons que « $(A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C) \text{ ou } (B \text{ et } C)$ » est vrai. Procédons par disjonction de cas.
  - Si « $(A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C)$ » est vrai, on a directement la propriété voulue.
  - Si « $B \text{ et } C$ » est vrai, procédons à nouveau par disjonction de cas.
    - Si A est vrai, alors « $A \text{ et } B$ » est vrai (puisque B est vrai par hypothèse), donc « $(A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C)$ » est vrai.
    - Si A est faux, alors « $\text{non } A \text{ et } C$ » est vrai (puisque C est vrai par hypothèse), donc « $(A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et } C)$ » est vrai.
- Supposons que « $(A \text{et} B) \text{ou} (\text{non } A \text{et} C)$ » est vrai. Alors « $(A \text{et} B) \text{ou} (\text{non } A \text{et} C) \text{ou} (B \text{et} C)$ » est vrai, par définition du connecteur logique « ou ».

Exercice 2

Écrire la négation de la formule logique suivante, sans utiliser l'opérateur logique de négation. Aucune démonstration n'est demandée.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 = x^2 - 1.$$

La négation de la formule ci-dessus est :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 \neq x^2 - 1.$$

Exercice 3

La formule logique suivante est-elle vraie ou fausse ? Démontrez votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x < y^2.$$

Cette formule est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$; posons $y = x + 1$; on a alors :

$$\begin{aligned} y^2 &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \\ &\geqslant x + 1 && \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \geqslant 0 \\ &> x. \end{aligned}$$