UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Feuille n°5 : Arithmétique

Division euclidienne, relation de divisibilité

Exercice 1

Sachant que $12\,079\,233 = 75\,968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division euclidienne de $12\,079\,233$ par $75\,968$, puis par 159.

Exercice 2

1. Effectuer la division euclidienne de 903 par 37.
2. Quel est le plus petit entier positif qu'il faut ajouter à 903 pour que le quotient de la division euclidienne augmente de 1 ?
3. Quel est le plus petit entier positif qu'il faut enlever à 903 pour que le quotient de la division euclidienne diminue de 1 ?

Exercice 3

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 4

Peut-on mettre les nombres entiers de 1 à 30 dans les cases d'un tableau de 5 lignes et 6 colonnes de telle façon qu'en additionnant pour chaque colonne les nombres qui s'y trouvent, on obtienne des sommes égales ?

Exercice 5

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (d'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles ; on tâchera de les donner toutes)

Exercice 6

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que n est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8\,123$?

Exercice 7

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$ (c'est-à-dire quotients et restes), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b.

Exercice 8

Montrer qu'un entier est divisible par 7 si et seulement si la différence entre le nombre de ses dizaines et le double de son chiffre des unités est divisible par 7. L'entier 398 754 321 est-il divisible par 7 ?

PGCD, PPCM et relations de Bézout

Exercice 9

1. Prouver que 23 et 35 sont premiers entre eux. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers relatifs u et v tels que $23u + 35v = 1$.
2. Même question avec 27 et 25.

Exercice 10

1. Déterminez le pgcd de 2 873 et 1 001, ainsi que deux entiers relatifs u et v tels que

$$2\,873u + 1\,001v = \mathrm{pgcd}(2\,873, 1\,001).$$

2. Existe-t-il des entiers relatifs u et v vérifiant $2\,873u + 1\,001v = 15$?

Exercice 11

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd des entiers 231 868 et 8 190. En déduire leur ppcm.
2. Même question avec les entiers 23 145 et 117.
3. Même question avec 12 345 et 678.

Exercice 12

1. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que a et $a + b$ sont premiers entre eux.
2. Soit a, b et c trois entiers. Montrer que si a est premier avec b et c, il est premier avec leur produit bc.
3. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, les entiers a^k et b^l sont premiers entre eux.

Exercice 13

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6 480.

Exercice 14

Soit n un entier. Montrer que, si l'entier m divise les entiers $8n + 7$ et $6n + 5$, alors $m = \pm 1$.

Exercice 15

Soit n un entier positif. Montrer que $2n + 3$ et $n^2 + 3n + 2$ sont premiers entre eux.

Exercice 16

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fraction

$$\frac{5^{n+1}+6^{n+1}}{5^n+6^n}$$

est irréductible.

Exercice 17

On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(n) = \text{pgcd}(42, n)$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$ et $f(5)$. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{N})$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{18\})$ et $f^{-1}(\{6, 15\})$.
4. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (u, v) tels que $42u + 5v = f(5)$.
5. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (u, v) tels que $42u + 7v = 3$.

Exercice 18

1. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6a + 11b = 1$.
2. Trouver une solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $6a + 11b = 6$, puis résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6a + 11b = 6$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6a + 12b = 5$.

Exercice 19

En fin de marché, un commerçant a soldé ses caisses de légumes : la caisse de courgettes à 26 euros, celles de tomates à 17 euros et celles de pommes de terre à 13 euros. Il a touché en tout 613 euros. Pour pouvoir payer les producteurs, il a besoin de savoir combien de caisses de chaque légume il a vendu, mais il ne se souvient plus que du nombre total de caisses : 28. Pouvez-vous l'aider ?

Nombres premiers et factorisation

Exercice 20

Les nombres 111, 1111, 11 111, 111 111 sont-ils premiers ?

Exercice 21

1. Décomposer en facteurs premiers les entiers $a = 46\,848$, $b = 2\,379$, $c = 8\,633$, $d = 4\,183$.
2. Décomposer 2 873 et 1 001 en facteurs premiers.

Exercice 22

Soit $n = 792$. Trouver le plus petit entier naturel m tel que nm soit le carré d'un entier.

Exercice 23

Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 126 ! (factorielle 126) ?

Exercice 24

Existe-t-il des nombres premiers $p > q > r$ tels que les différences $p - q$, $p - r$ et $q - r$ soient aussi des nombres premiers ? Si oui, donner toutes les possibilités.

Exercice 25

1. Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 100.
2. Le nombre 161 est-il premier ?
3. On appelle nombres premiers jumeaux, deux nombres premiers qui, comme 11 et 13, diffèrent de 2. À l'aide du crible d'Ératosthène, déterminer deux nombres premiers jumeaux, compris entre 200 et 250.

Exercice 26

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

On pourra raisonner par l'absurde : supposer que l'ensemble des nombres premiers est fini et considérer le produit de tous les nombres premiers plus 1*.*

Exercice 27

Soit k un entier naturel non nul. Montrer que, si $2^k - 1$ est un nombre premier, alors k est un nombre premier.

Exercice 28

Soit k un entier naturel non nul. Montrer que, si $2^k + 1$ est un nombre premier, alors k est une puissance de 2.

Exercice 29

Un apprenti chocolatier veut réaliser une tablette de chocolat quadrillée en 600 petits carrés identiques. La tablette doit être partagée selon les lignes de son quadrillage en grands morceaux carrés tous identiques. Quelle taille maximale pourra avoir un tel morceau carré ?

Exercice 30

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'un diviseur *premier* commun à $a + b$ et ab.)

Exercice 31

1. Décomposer 51 et 216 en facteurs premiers ; calculer $\mathrm{pgcd}(51, 216)$. Déterminer toutes les expressions de 216 comme le produit de deux entiers naturels premiers entre eux.
2. Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $a + b = 51$, $a < b$ et $\mathrm{ppcm}(a, b) = 216$. Montrer que $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$ divise $\mathrm{pgcd}(51, 216)$.
3. Montrer que $a' = a/d$ et $b' = b/d$ sont premiers entre eux. Que vaut $\mathrm{ppcm}(a', b')$? En déduire la liste des couples (a, b) possibles.

Exercice 32

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels (a', b') tel que $a' \mid a$, $b' \mid b$ et $a'b' = \mathrm{ppcm}(a, b)$.

Congruences

Exercice 33

Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de 247^{349} ?

Exercice 34

On remarque que $7 \equiv -1 \pmod 8$.

Soit n un entier positif. Démontrer que si n est impair alors le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 ; dans le cas où n est pair, donner le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8.

Exercice 35

1. Calculer toutes les puissances de 3 modulo 7, c'est-à-dire $3^0 \pmod 7$, $3^1 \pmod 7$, $3^2 \pmod 7$…
2. Calculer toutes les puissances de 38 modulo 7.

Exercice 36

1. Déterminer le chiffre des unités et celui des dizaines de $123\,456^{789}$.
2. Trouver les trois derniers chiffres de $7^{9\,999}$.

Exercice 37

Pour quelles valeurs de l'entier positif n :

1. le nombre $4^n + 2^n + 1$ est-il divisible par 7 ?
2. le nombre $9^n + 3^n + 1$ est-il divisible par 13 ?
3. le nombre $25^n + 5^n + 1$ est-il divisible par 31 ?

Exercice 38

Soit a, b et n des entiers positifs. Si $a \equiv b \pmod n$, a-t-on nécessairement $a^a \equiv b^b \pmod n$?

Exercice 39

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout entier impair est 1.
2. Montrer, de même, que tout entier pair x vérifie $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.
3. Soit x un entier. Quelles sont les valeurs possibles de $2x^2 \pmod 8$?
4. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
5. En déduire que ces deux derniers entiers ne sont pas des carrés, puis que $ab + bc + ca$ non plus.

Exercice 40

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 5. Montrer que p divise une infinité d'entiers dont tous les chiffres sont des 1 : 1, 11, 111, 1 111…

Numération

Exercice 41

Écrire en base 7 les nombres suivants :

$$A = 7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5, \quad B = 7^5 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 8, \quad C = 7^4 + 7^3 \times 7 + 3 \times 7.$$

Exercice 42

1. Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale, le nombre mille sept cent quatre-vingt neuf.
2. Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?
3. Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

Exercice 43

1. Dans quelle base b a-t-on l'égalité $\overline{32}^{(b)} \times \overline{14}^{(b)} = \overline{438}^{(b)}$?
2. Même question avec l'équation $\overline{165}^{(b)} \times \overline{21}^{(b)} = \overline{4125}^{(b)}$.
3. Écrire le nombre $\overline{1\,010}^{(5)}$ en base 2.

Exercice 44

1. Écrire $1\,234$ en base 5.
2. Écrire $\overline{1\,234}^{(5)}$ en base 10.

Exercice 45

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1\,254}$ et son double $\overline{2\,541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

Exercice 46

1. Calculer $\overline{4023}^{(5)} \times \overline{12}^{(5)}$.
2. Calculer $\overline{2345}^{(6)} \times \overline{52}^{(6)}$.

Exercice 47

Ce nombre s'écrit avec huit chiffres en base 2 et avec six chiffres en base 3. Quel est-il ? Ah, oui, j'oubliais, c'est un nombre premier.