

Feuille n° 4 : géométrie

1 Produit scalaire

Exercice 1

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme non aplati du plan euclidien \mathcal{P} .

1. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Montrer que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires si et seulement si $AC = BD$.
3. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

4. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si $AB = BC$.

Exercice 2

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme du plan euclidien \mathcal{P} .

1. Montrer que

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad CD^2 + DA^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

2. Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Exercice 3

Soient A, B deux points distincts du plan euclidien \mathcal{P} et I le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{P}, \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
2. Montrer que l'application de \mathcal{P} dans \mathbf{R} donnée par $M \mapsto MA^2 + MB^2$ admet un minimum atteint en un unique point que l'on explicitera.

Exercice 4

Soit A, B deux points du plan euclidien \mathcal{P} . On pose $\mathcal{C} := \{M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}\}$. Soit I le milieu de $[A, B]$. Montrer que l'on a

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

En déduire que \mathcal{C} est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5

Soit A, B deux points distincts du plan euclidien \mathcal{P} . On pose : $\mathcal{C} := \{M \in \mathcal{P}, \quad MA = \frac{1}{3}MB\}$. Soit I et J les points de \mathcal{P} définis par

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$$

Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad MA^2 - \frac{1}{9}MB^2 = \frac{8}{9}\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

En déduire que \mathcal{C} est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6

Soit A, B et C trois points du plan euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} . On suppose $A \neq B$ et $A \neq C$.

1. Montrer que $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|}$, où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ désigne l'angle géométrique défini par \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Montrer que si le triangle (ABC) est équilatéral alors $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sqrt{3}$.
3. On suppose le triangle (ABC) équilatéral. On suppose que les coordonnées de A, B et C dans \mathcal{R} sont toutes rationnelles. Montrer qu'alors $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Montrer par ailleurs que $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$. Conclure.

Exercice 7

Soient P, Q, R trois points du plan euclidien \mathcal{P} .

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$(\overrightarrow{QP} + \lambda \overrightarrow{QR})^2 = \overrightarrow{QP}^2 + 2\lambda \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} + \lambda^2 \overrightarrow{QR}^2.$$

2. En considérant le discriminant du polynôme (en la variable λ) de droite dans l'égalité précédente, montrer que

$$|\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}| \leq PQ \cdot QR.$$

3. Montrer que

$$\overrightarrow{PR}^2 = \overrightarrow{QP}^2 - 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2.$$

4. En déduire que

$$PR \leq PQ + QR.$$

5. Montrer que $PR = PQ + QR$ si et seulement si $Q \in [PR]$.

6. On considère maintenant quatre points P, Q, R et S . Montrer que

$$PS \leq PQ + QR + RS$$

et caractériser les configurations de quatre points P, Q, R et S qui vérifient l'égalité $PS = PQ + QR + RS$.

Exercice 8

Soit \mathcal{P} le plan et $\mathcal{R} = (o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de \mathcal{P} . On considère l'application

$$\varphi : ((x, y)_{\vec{\mathcal{R}}}, (x', y')_{\vec{\mathcal{R}}}) \mapsto xx' + 3yy'.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Déterminer un repère (O, \vec{I}, \vec{J}) de \mathcal{P} qui soit orthonormé pour ce produit scalaire.
3. Soit X, Y, X' et Y' des réels. Calculer $\varphi(X\vec{I} + Y\vec{J}, X'\vec{I} + Y'\vec{J})$.

2 Barycentres

Exercice 9

Soient A et B deux points du plan \mathcal{P} . Construire, s'il existe, le barycentre G des points pondérés suivants :

1. $(A, 1)$ et $(B, 3)$

2. $(A, 2)$ et $(B, 2)$
3. $(A, -1)$ et $(B, 2)$
4. $(A, -2)$ et $(B, -6)$
5. $(A, -2)$ et $(B, 2)$

Exercice 10

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A := (1, 1)_{\mathcal{R}}$ et $B := (5, 3)_{\mathcal{R}}$.

1. Faire une figure, que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Calculer les coordonnées dans \mathcal{R}
 - (a) du barycentre G_1 de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ (s'il existe).
 - (b) du barycentre G_2 de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(O, 3)$ (s'il existe).
3. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que $H = (-1, 0)$ soit le barycentre de (A, a) et (B, b) . Donner une interprétation du résultat obtenu.
4. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que O soit le barycentre de (A, a) et (B, b) . Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Existe-t-il un point C tel que O soit le centre de gravité du triangle ABC ? Si oui, en déterminer les coordonnées dans \mathcal{R} .

Exercice 11

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan \mathcal{P} . Soit K le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$, soit J le milieu du segment $[CD]$, soit G le centre de gravité du triangle BCD , et soit I le milieu du segment $[AG]$. Les points I, J et K sont-ils alignés?

Exercice 12

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan \mathcal{P} . Notons I le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et J le barycentre de $(B, 1)$, $(C, -2)$.

1. Faire une figure.
2. Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, -2)$. Justifier que les points A, J et G sont alignés, et que les points C, I et G sont alignés. En déduire la position du point G , et le placer sur la figure.
3. Montrer que les droites (BG) et (AC) sont parallèles.

Exercice 13

Soit A, B et C trois points du plan \mathcal{P} , soit P le symétrique de A par rapport à C , soit Q le point défini par $\vec{CQ} = \frac{1}{3}\vec{CB}$, et R le milieu de $[AB]$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 14

Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan \mathcal{P} (on suppose A, B, C et D deux à deux distincts). Soit K le milieu de $[AD]$ et L le milieu de $[BC]$. Soit J le point du plan défini par $\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer K comme barycentre de A et D affectés de poids convenables. Exprimer J comme barycentre de A et B affectés de poids convenables.
3. Justifier que les droites (DJ) et (BK) s'intersectent en un unique point G , que l'on exprimera comme barycentre des points A, B et D affectés de poids convenables.
4. Montrer que les droites (DJ) , (BK) et (AL) sont concourantes.

Exercice 15

On considère un triangle ABC et deux réels λ et μ tels que $\lambda + \mu \neq 0$. On note A' le barycentre de $\{(B, \lambda), (C, \mu)\}$, B' le barycentre de $\{(C, \lambda), (A, \mu)\}$, C' le barycentre de $\{(A, \lambda), (B, \mu)\}$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 16

Soit A, B et C trois points non alignés du plan \mathcal{P} . Soit a, b et c des réels tels que $a + b + c \neq 0$ et soit M le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) .

1. On suppose que $b + c = 0$. Montrer que (AM) et (BC) sont parallèles.
2. On suppose que (AM) et (BC) sont sécantes; on note L leur point d'intersection. Montrer que L est le barycentre de (B, b) et (C, c) .

Exercice 17

Soit A, B et C trois points non alignés du plan \mathcal{P} . Soit A' le milieu de $[BC]$ et D celui de $[AA']$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD) . Le but de l'exercice est de déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA'}$.
2. En déduire que D est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
3. En déduire à l'aide de l'exercice précédent que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 18

1. Démontrer à l'aide de barycentre que les médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.
2. Démontrer que si $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace \mathcal{R} , les trois droites qui relient les milieux de deux côtés non sécants sont sécantes.

Exercice 19

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Montrer que les milieux des côtés de ce quadrilatère forment un parallélogramme (théorème de Varignon).

Exercice 20

Soit ABC un triangle du plan \mathcal{P} et G son centre de gravité. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur \overrightarrow{AB} .

Exercice 21

Soit ABC un triangle du plan \mathcal{P} .

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{A} des réels m tels que le barycentre G_m du système pondéré $\{(A, 1), (B, m), (C, -1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points G_m lorsque m décrit \mathcal{A} .
2. Déterminer l'ensemble \mathcal{A}' des réels m tels que le barycentre H_m du système pondéré $\{(A, 1), (B, m), (C, 1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points H_m lorsque m décrit \mathcal{A}' .

Exercice 22

Soit (ABC) un triangle du plan \mathcal{P} . On note O le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) , G l'isobarycentre de A, B et C et H le point de \mathcal{P} tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
2. En déduire que H est l'orthocentre du triangle (ABC) .
3. Montrer que O, G et H sont alignés.

Exercice 23

Soit A, B et C trois points du plan \mathcal{P} . On note G le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$.

1. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2GA^2 + GB^2 - GC^2 + 2MG^2.$$

2. Montrer qu'il existe un unique point K de \mathcal{P} tel que

$$\forall M \in \mathcal{P} \setminus \{K\}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 > 2KA^2 + KB^2 - KC^2.$$

Exercice 24

Soit A, B et C trois points du plan euclidien \mathcal{P} . Déterminer et construire

1. l'ensemble X_1 des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| \leq 2.$$

2. l'ensemble X_2 des points M du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

3. l'ensemble X_3 des points N du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Exercice 25

Soit A, B et C trois points du plan euclidien \mathcal{P} . En quel(s) point(s) P du plan \mathcal{P} est-ce que la quantité

$$\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\|$$

est minimale ?

Exercice 26

Le plan euclidien \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} d'origine O . On considère les points de \mathcal{P} suivants :

$$A := \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)_{\mathcal{R}}, \quad B := (0, -1)_{\mathcal{R}}, \quad C := \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{R}}.$$

Soit G le centre de gravité du triangle ABC . On note Γ le cercle circonscrit à ABC .

1. Faire un dessin.

2. Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.

3. Soit M un point sur Γ . On note $I(M)$ le barycentre de $\{(A,1), (B,1), (C,1), (M,3)\}$. Ainsi $I: M \mapsto I(M)$ définit une application de Γ dans le \mathcal{P} . Simplifier l'expression de $I(M)$ en terme d'un barycentre de seulement 2 points pondérés.

4. On note $A' = I(A)$, $B' = I(B)$ et $C' = I(C)$. Placer les points A', B' et C' sur le dessin.

5. Soit H le barycentre de $\{(G, 1), (O, 1)\}$

Placer H sur le dessin. Soit $M \in \Gamma$. Exprimer $\overrightarrow{2HI(M)}$ en fonction de M et O . En déduire que $I(M)$ est sur un cercle de centre H et de rayon à déterminer.

6. Montrer que $I(\Gamma)$ est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

3 Transformations du plan, application des nombres complexes à la géométrie

Dans tous les exercices de cette section, \mathcal{P} désigne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé; on dispose en particulier une application bijective « affixe » $\mathcal{P} \rightarrow \mathbf{C}$ au moyen de laquelle on peut si nécessaire identifier \mathcal{P} et \mathbf{C} .

Exercice 27

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des similitudes de \mathcal{P} suivantes (les points et vecteurs seront décrits par leurs affixes, les droites par une équation cartésienne)

1. $z \mapsto (1 + i)z + (3 - i)$
2. $z \mapsto (3 + \sqrt{3}i)z + (1 - i)$
3. $z \mapsto i\bar{z}$
4. $z \mapsto i\bar{z} + (1 - i)$

Exercice 28

Pour tout nombre complexe u , on note f_u la similitude de \mathcal{P} décrite par $z \mapsto u^2z + u - 1$.

1. Déterminer l'ensemble des $u \in \mathbf{C}$ tels que f_u est une translation (respectivement une rotation d'angle $\frac{\pi i}{2}$, respectivement une homothétie de rapport -2). Pour tout élément u de l'ensemble en question, donner les éléments caractéristiques de f_u .
2. On suppose que $u = 1 - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_u .

Exercice 29

Soit A, B, C trois points de \mathcal{P} deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c . On suppose que $|a| = |b| = |c|$.

1. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
2. Montrer que $\bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur.
3. Montrer que $(b + c)(\bar{b} + \bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.
4. Soit H le point d'affixe $a + b + c$. Montrer qu'on a $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
5. Qui est H ?

Exercice 30

Soit A, B, C et D quatre points de \mathcal{P} d'affixes respectives a, b, c et d , avec $A \neq B$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, b, c et d , pour qu'il existe une rotation qui envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[CD]$? Comment alors construire le centre de la rotation?

Exercice 31

Soit $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une similitude.

1. Montrer que l'image d'une droite de \mathcal{P} par f est une droite.
2. Montrer que l'image par f d'un segment de \mathcal{P} non réduit à un point est un segment de \mathcal{P} non réduit à un point. Montrer que l'image par f du milieu d'un segment de \mathcal{P} est le milieu de l'image par f de ce segment.
3. Montrer que l'image par f d'un triangle non aplati de \mathcal{P} est un triangle non aplati. Montrer que l'image par f de l'isobarycentre d'un triangle de \mathcal{P} est l'isobarycentre de l'image par f de ce triangle.

Exercice 32

Quelles sont les homothéties de \mathcal{P} qui sont des isométries? On les décrira par leurs éléments caractéristiques.

Exercice 33

1. Soit $k \in \mathbf{R}^*$ et $h: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une homothétie de \mathcal{P} de rapport k . Soit r un réel strictement positif. Montrer que l'image d'un cercle de centre r est un cercle de rayon $|k|r$
2. Soit O et O' des points de \mathcal{P} , \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et \mathcal{C}' le cercle de centre O' et de rayon 2. Déterminer toutes les homothéties h telles que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$; on donnera en particulier les éléments caractéristiques de ces homothéties.

Exercice 34

Soit O_1 et O_2 des points de \mathcal{P} , k_1 et k_2 deux réels non nuls, h_1 l'homothétie de centre O_1 et de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O_2 et de rapport k_2 .

1. On suppose $k_1 k_2 \neq 1$. Montrer que $g := h_2 \circ h_1$ est une homothétie; exprimer le rapport de g en fonction de k_1 et k_2 et le centre de g comme un barycentre de O_1 et O_2 affectés de poids que l'on exprimera également en fonction de k_1 et k_2 .
2. On suppose $k_1 k_2 = 1$. Montrer que $h_2 \circ h_1$ est une translation, donc on exprimera le vecteur en fonction de k_2 et du vecteur $\overrightarrow{O_1 O_2}$.

Exercice 35

Soit O un point du plan affine \mathcal{P} , k un réel non nul et différent de 1, \vec{u} un vecteur du plan, h l'homothétie de centre O et de rapport k et t la translation de vecteur \vec{u} .

1. Montrer que $g_1 := h \circ t$ est une homothétie; on exprimera le rapport de g_1 en fonction de k et si I_1 est le centre de g_1 , on exprimera $\overrightarrow{I_1 O}$ en fonction de k et \vec{u} .
2. Montrer que $g_2 := t \circ h$ est une homothétie; on exprimera le rapport de g_2 en fonction de k et si I_2 est le centre de g_2 , on exprimera $\overrightarrow{I_2 O}$ en fonction de k et \vec{u} .

Exercice 36

Soit ABC un triangle de \mathcal{P} . On note s_A, s_B, s_C les symétries centrales par rapport à A, B, C respectivement. Décrire l'isométrie $s_A \circ s_B \circ s_C$ (nature, éléments caractéristiques).

Exercice 37

Soient r_a et r_b deux rotations non triviales de \mathcal{P} d'angles respectifs θ_a et θ_b . Montrer que $r_a \circ r_b = r_b \circ r_a$ si et seulement si r_a et r_b ont même centre.

Exercice 38

Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{P} et \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} . Soient t la translation de vecteur \vec{u} et σ la réflexion par rapport à la droite \mathcal{D} . À quelle condition a-t-on $\sigma \circ t = t \circ \sigma$?

Exercice 39

1. Montrer que le produit de deux rotations de \mathcal{P} d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une symétrie centrale.
2. Déterminer le centre de cette symétrie centrale; on l'exprimera en fonctions des centres des rotations considérées.

Exercice 40

Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites du plan \mathcal{P} . On note $\sigma_{\mathcal{D}}, \sigma_{\mathcal{D}'}$ les réflexions par rapport aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

1. Montrer que si \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{D}' alors $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est une translation; déterminer le vecteur de cette translation.
2. On suppose que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes. Soit Ω leur point d'intersection. Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est une rotation de centre Ω . Déterminer l'angle de cette rotation en fonction de l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Exercice 41

Montrer que toute rotation et toute translation est le produit de plusieurs couples de réflexions.

Exercice 42

Soient r_1, r_2 deux rotations de \mathcal{P} d'angles θ_1, θ_2 respectivement. Montrer que :

1. Si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$ alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.
2. Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation.

Exercice 43

Soient B et C deux points distincts de \mathcal{P} . On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur \overrightarrow{BC} . On note s la composée $r_C \circ t \circ r_B$.

1. Quelle est la nature de s ?
2. Quelle est l'image de B par s ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de s ?

Exercice 44

1. Montrer que l'image d'un cercle par une isométrie de \mathcal{P} est un cercle de même rayon.
2. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles de même rayon. Déterminer toutes les isométries qui transforment \mathcal{C} en \mathcal{C}' . (on donnera leurs éléments caractéristique en fonction des centres et des rayons de \mathcal{C} et \mathcal{C}').

Exercice 45

Soient A et B deux points distincts de \mathcal{P} . On note r_A et r_B les rotations de centre A et B , et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit f la transformation $r_B \circ r_A^{-1}$.

1. Construire $C = f(A)$.
2. Quelle est la nature de f ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de f ?
4. Soit M un point du plan. Quelle est la nature du quadrilatère $r_A(M)r_B(M)CA$?
5. Quel est le lieu géométrique du point $r_B(M)$ lorsque le point M parcourt le cercle Γ de diamètre $[AB]$?
6. Déterminer le lieu géométrique du milieu du segment $[r_A(M)r_B(M)]$ lorsque le point M parcourt le cercle Γ .

4 Équations de droites dans le plan, équations de droites et de plans dans l'espace, distance d'un point à une droite et à un plan

Exercice 46

Le plan euclidien \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} . Soit $A := (1, 3)_{\mathcal{R}}$ et $B := (-3, -1)_{\mathcal{R}}$.

1. Calculer la distance de A puis de B à la droite \mathcal{D} d'équation dans \mathcal{R} : $3x - y - 6 = 0$
2. Même question avec $A := (1, 3)_{\mathcal{R}}$ et $B := (3, -2)_{\mathcal{R}}$ et la droite \mathcal{D} d'équation dans \mathcal{R} : $x + 2y - 2 = 0$.

Exercice 47

Le plan euclidien \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} . Calculer la distance du point M à la droite \mathcal{D} lorsque :

1. $M := (4, 2)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{D} admet pour équation cartésienne dans \mathcal{R} : $4x + 3y = 7$.
2. $M := (1, -1)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{D} est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et passant par le point $(4, 5)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 48

L'espace euclidien \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} .

- Calculer la distance du point M au plan \mathcal{P} lorsque :
 - $M := (1, 2, 3)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{P} admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R} : x + 2y + 2z = -1$.
 - $M := (1, 0, 2)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{P} est le plan dirigé par les vecteurs $(1, 0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}$ et $(2, 2, 3)_{\vec{\mathcal{R}}}$, et passant par le point $(4, 0, 5)$.
- Calculer la distance du point M à la droite \mathcal{D} lorsque :
 - $M := (3, 4, 0)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{D} admet pour système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R} :$
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$
 - $M := (1, -1, 0)_{\mathcal{R}}$ et \mathcal{D} est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1, 2)_{\vec{\mathcal{R}}}$ et passant par le point $(4, 0, 5)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 49

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère \mathcal{R} .

- Soit $M := (1, 0)_{\mathcal{R}}$, $A := (-2, 1)_{\mathcal{R}}$ et $B := (5, 10)_{\mathcal{R}}$. Le point M appartient-il à la droite (AB) ?
- Soit m un réel, $C_m := (2, m)_{\mathcal{R}}$, $A := (1, 0)_{\mathcal{R}}$ et $B := (-1, 4)_{\mathcal{R}}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que le point C_m appartient à la droite (AB) .

Exercice 50

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère \mathcal{R} .

- Déterminer une équation cartésienne dans \mathcal{R} des droites suivantes :

$$\{(-1, 0)_{\mathcal{R}} + t(1, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, \quad t \in \mathbf{R}\}, \quad \{(1, 1)_{\mathcal{R}} + t(0, 3)_{\vec{\mathcal{R}}}, \quad t \in \mathbf{R}\}.$$

- Donner une description paramétrique de la droite d'équation cartésienne dans $\mathcal{R} :$

$$x + 2y = 4.$$

Exercice 51

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère \mathcal{R} .

- On considère les points suivants de $\mathcal{P} :$

$$A := (1, 1)_{\mathcal{R}}, \quad B := (2, 2)_{\mathcal{R}}; \quad C := (5, -1)_{\mathcal{R}}, \quad D := (2, 0)_{\mathcal{R}}.$$

Déterminer des équations cartésiennes dans \mathcal{R} des droites (AB) et (CD) et déterminer les coordonnées dans \mathcal{R} de leur intersection.

- Soit $m \in \mathbf{R}$; on considère les points suivants de $\mathcal{P} :$

$$A' := (2, 0)_{\mathcal{R}}, \quad B' := (3, 4)_{\mathcal{R}}; \quad C' := (2, 2)_{\mathcal{R}}, \quad D'_m := (3, m)_{\mathcal{R}}.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles les droites $(A'B')$ et $(C'D'_m)$ ont une intersection non vide.

Exercice 52

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère \mathcal{R} . Dans chacun des cas suivants, déterminer si A , B et C sont alignés et dans l'affirmative déterminer une équation cartésienne dans \mathcal{R} de la droite qui les contient.

- $A := (-3, 3)_{\mathcal{R}}$, $B := (5, 2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2, 1)_{\mathcal{R}}$
- $A := (1, 1)_{\mathcal{R}}$, $B := (-2, 2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2, 1)_{\mathcal{R}}$

3. $A := (4, -3)_{\mathcal{R}}, B := (0, -1)_{\mathcal{R}}$ et $C := (2, -2)_{\mathcal{R}}$
4. $A := (2, -1)_{\mathcal{R}}, B := (1, -2)_{\mathcal{R}}$ et $C := (-3, 4)_{\mathcal{R}}$.

Exercice 53

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère \mathcal{R} .

1. Déterminer la nature et une description paramétrique de l'intersection des droites de \mathcal{P} suivantes :

$$\{t(1, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{(-1, -4)_{\mathcal{R}} + t(1, 2)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}.$$

2. Même question avec les droites :

$$\{(1, 1)_{\mathcal{R}} + t(0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{(1, 3)_{\mathcal{R}} + t(0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}.$$

3. Même question avec les droites :

$$\{(1, 1)_{\mathcal{R}} + t(0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \{(1, 2)_{\mathcal{R}} + t(0, 2)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 54

L'espace euclidien \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} .

1. Déterminer la nature et une description paramétrique dans \mathcal{R} des sous-ensembles de \mathcal{E} décrits par les systèmes d'équations cartésiennes dans \mathcal{R} suivants :

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - 5y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -x - 3z = 1 \\ 2x + 2y + 5z = 2 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \\ -x + y - 4z = 7. \end{cases}$$

$$g) x - 3y + z = 1 \quad h) 3x - y + z = 1 \quad i) 5x - 2y = 1$$

Même question pour les intersections deux à deux de ces ensembles.

2. Calculer les produits vectoriels suivants :

$$(0, 0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}(-2, 2, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, \quad (2, 1, 3)_{\vec{\mathcal{R}}} \wedge (0, 1, 2)_{\vec{\mathcal{R}}}$$

$$(1, 0, -5)_{\vec{\mathcal{R}}} \wedge (0, 1, 3)_{\vec{\mathcal{R}}}, \quad (1, 0, -5)_{\vec{\mathcal{R}}} \wedge (2, 0, -10)_{\vec{\mathcal{R}}}$$

3. Déterminer la nature et un système d'équations cartésiennes dans \mathcal{R} des sous-ensembles de \mathcal{E} suivants :

$$\{(1, 0, 0)_{\mathcal{R}} + t(1, 0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\{(1, 1, 1)_{\mathcal{R}} + t(2, 1, 3)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\{(1, 3, 2)_{\mathcal{R}} + t(1, 1, 5)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\{(1, 0, -1)_{\mathcal{R}} + t(-2, 2, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\{(1, 0, -1)_{\mathcal{R}} + t(0, 0, 0)_{\vec{\mathcal{R}}}, t \in \mathbf{R}\}$$

$$\{(1, 1, -1)_{\mathcal{R}} + t(0, 0, 1)_{\vec{\mathcal{R}}} + u(-2, 2, 1)_{\vec{\mathcal{R}}}, (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$$

$$\{(1, 0, 1)_{\mathcal{R}} + t(2, 1, 3)_{\vec{\mathcal{R}}} + u(0, 1, 2)_{\vec{\mathcal{R}}}, (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$$

$$\{(1, 3, 2)_{\mathcal{R}} + t(1, 0, -5)_{\vec{\mathcal{R}}} + u(0, 1, 3)_{\vec{\mathcal{R}}}, (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$$

$$\{(1, 3, 2)_{\mathcal{R}} + t(1, 0, -5)_{\vec{\mathcal{R}}} + u(2, 0, -10)_{\vec{\mathcal{R}}}, (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$$

Même question pour les intersections deux à deux de ces ensembles.

Exercice 55

L'espace euclidien \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} . Soit $m \in \mathbf{R}$. Soit \mathcal{P}_m le plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R} : m^2 x + (2m - 1) y + m z = 3$. Donner une description simple de l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{E}, \quad \forall m \in \mathbf{R}, \quad M \in \mathcal{P}_m\}.$$