Feuille n° 3 : Nombres complexes

Exercice 1

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

1. $z = (2+i)^3$,

2. $z = (3+2i)(-1+i) + (3-i)(-1+2i)$,

3. $z = \dfrac{1-3i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+2i}$,

4. $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Exercice 2

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i.$$

Trouver les nombres complexes conjugués de $P(i)$, $P(-i)$ et $P(2-3i)$.

Exercice 3

Calculer les deux nombres complexes :

1. $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$,

2. $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$.

On donnera les résultats sous forme algébrique. Indication : en posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\Re e(z^5)$.

Exercice 4

Représenter dans le plan complexe sur un même dessin l'ensemble des points M_i, d'affixe z_i, $i = 1, \cdots, 5$, où

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 5i, \quad z_3 = 2+2i, \quad z_4 = 2-2i, \quad z_5 = -2-2i.$$

Exercice 5

Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $|z-1| = |z-3-2i|$,

2. $|z-3| = |z-1-i|$,

3. $|z-2+i| = \sqrt{5}$,

4. $|(1+i)z-2-i| = 2$,

5. $|z+3-i| \leqslant 2$,

6. $|z+3-i| > |z|$,

7. $|z| < |z+3-i| < 2$.

Exercice 6

Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$,

2. $z_2 = i - 1$,

3. $z_3 = \sqrt{3} + 3i$,

4. $z_4 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}}$,

5. $z_5 = \dfrac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}}$. En déduire la forme algébrique de z_5.

Exercice 7

Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\dfrac{1}{z}$ et de $-z$.

2. Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\dfrac{1}{z}$

Exercice 8

Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 9

Linéariser les expressions en x suivantes :

1. $\cos^5 x$,

2. $\sin^5 x$,

3. $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$,

4. $\cos^2 x \sin^4 x$.

Exercice 10

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2 + 6i$,

2. $z_2 = 1 + 4\sqrt{5}i$,

3. $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$,

2. $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$,

3. $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ (On rappelle que $\sqrt{625} = 25$.)

Exercice 12

Déterminer les racines :

1. 3-ièmes de $1 + i$,

2. 4-ièmes de $4i$,

3. 6-ièmes de $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Exercice 13

Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^{2n}=1$ d'inconnue u. Possède-t-elle des solutions réelles ?
2. En déduire les solutions de l'équation (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$(1+z)^{2n}-(1-z)^{2n}=0.$$
3. En effectuant des changements d'indice, montrer que
$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left[-\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right], \quad \prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$
4. Montrer que le produit des solutions non nulles de (E) est égal à 1.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$, $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

1. Calculer $S_q=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(z_k)^q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n=n(z^n+1).$$

Exercice 15

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

1. $\cos^{2p+1}(\theta)=\dfrac{1}{2^{2p}}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos\left((2p+1-2k)\theta\right)$,
2. $\sin^{2p+1}(\theta)=\dfrac{(-1)^p}{2^{2p}}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{k}\cos\left((2p+1-2k)\theta\right)$.

Exercice 16

1. Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z_1=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et calculer, pour tout entier strictement positif n, ses racines $n^{\text{ième}}$.
2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $z_0=1$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1}=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$
Montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation
$$z_{n+2}-z_{n+1}=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1}-z_n),$$
et en déduire la valeur de d_n pour tout entier n. Est-ce que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ? monotone ?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point du plan complexe d'affixe z_n. Soit O l'origine du plan complexe. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $|z_{n+1}|^2=|z_n|^2+d_n^2$ et en déduire que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.