Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2017–2018

Feuille n° 1 : logique

Exercice 1

Les propositions suivantes sont elles des tautologies (on pourra s'aider de tables de vérités) ?

1. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{P}$,
2. non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ non $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$,
3. ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ non ($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$),
4. ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et ($\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$),
5. (non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Exercice 2

Parmi les propositions suivantes, quelle est la négation de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (on pourra s'aider d'une table de vérité) ?

1. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$,
2. non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$,
3. $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$.

Exercice 3

1. L'affirmation « je suis arrivé à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (resp. suffisante, resp. nécessaire et suffisante) pour que l'affirmation « je suis monté dans le train de 9h30 » soit valide ?
2. Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un entier naturel soit strictement plus grand que 10.
3. Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un entier naturel soit divisible par 6.

Exercice 4

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Considérons l'implication suivante : « f croissante $\Longrightarrow f(3) \geq f(2)$ ». Parmi les implications suivantes, quelle est sa contraposée ?

1. « $f(3) \geq f(2) \Longrightarrow f$ croissante »,
2. « $f(3) < f(2) \Longrightarrow f$ n'est pas croissante »,
3. « f n'est pas croissante $\Longrightarrow f(3) < f(2)$ ».

Exercice 5

Traduire la formule suivante en langage courant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall n' \in \mathbf{N}, (n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}, \exists q \in \mathbf{N}, \exists q' \in \mathbf{N}, \quad y = qn \text{ et } y = q'n' \text{ et } y \neq 0.$$

Exercice 6

Nier l'assertion : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 7

1. Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n = 4$. On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4(4^2 - 1) = 4 \times 15 = 4 \times 3 \times 5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : il existe un entier naturel n tel que $n^2 - n$ n'est pas multiple de 3. Si $n = 2$, on a $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 8

On considère les formules suivantes :

a) $\exists n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, \quad p \leq n,$

b) $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, \quad p \leq n,$

c) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0,$

d) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0,$

e) $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0,$

f) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0,$

g) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad y^2 > x.$

1. Écrire la négation de chacune de ces formules.

2. Pour chacune de ces formules, indiquer (en le justifiant) si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 9

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

a) Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1,

b) L'application f est croissante,

c) L'application f est croissante et positive,

d) Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif,

e) L'application f est paire,

f) Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1. Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs.

2. Pour chacune des formules obtenues, écrire sa négation.

3. Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 10

Traduire en langage courant les assertions suivantes relatives à une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \quad f(x) < f(y),$

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists T \in \mathbf{R}^*, \quad f(x) = f(x + T),$

3. $\exists T \in \mathbf{R}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(x + T),$

4. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad y = f(x).$

Donner lorsque c'est possible, un exemple d'application qui satisfait cette propriété, ainsi qu'une autre qui ne la satisfait pas.

Exercice 11

Démontrer par contraposition l'énoncé suivant : si n est un entier naturel dont le carré est pair, alors n est pair.

Exercice 12

Démontrer par contraposition la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^3 = 2 \Rightarrow x < 2.$$

Exercice 13

Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : soit x un réel positif tel que, pour tout réel $y > 0$, on ait $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 14

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 15

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!$.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n < n!$.

3. Déterminer un entier A tel que, pour tout entier $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

Exercice 16

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathcal{P}_n$ la proposition $2^n > n^2$.

1. Montrer que la proposition $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.

2. Pour quelles valeurs de n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

Exercice 17

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 18

Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Exercice 19

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 20

Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Exercice 21

1. Montrer par récurrence sur l'entier naturel n les formules

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$-1+4-9+\cdots+(-1)^n n^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 22

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}.$$