Université de Rennes 1 — Année universitaire 2017-2018

Licence de mathématiques – Module ANAR

Examen terminal

Première session

Vendredi 11 mai 2018, 10h30 – 12h30

Le sujet comporte deux pages et cinq exercices. La qualité de la rédaction et de l'argumentation entre dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.* Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Les questions jugées plus difficiles sont précédées d'un **(*)**.

Exercice 1

1. Résoudre le système de congruences d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$: $\left\{ \begin{array}{lcr} x & \equiv & 5\ [7] \\ x & \equiv & 7\ [13]\,. \end{array} \right.$
2. Résoudre l'équation $x^3 = 5, \quad x \in A$ pour les anneaux A suivants : $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{K}$ un corps à 4 éléments. On note 0 l'élément neutre pour l'addition, 1 l'élément neutre pour la multiplication, et $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\} = \{\alpha, \beta\}$. En respectant ces notations, donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{K}$. *Aucune justification, aucun calcul annexe n'est demandé sur la copie.*

Exercice 3

Pour chacune des assertions ($\mathbf{A_1}$) à ($\mathbf{A_{10}}$) ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse. *On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées !*

1. Soit B un anneau et A un sous-anneau de B.
   (a) ($\mathbf{A_1}$) On a $A^\times = B^\times \cap A$.
   (b) ($\mathbf{A_2}$) Soit $a \in A$ un élément irréductible de A ; alors a est un élément irréductible de B.
2. ($\mathbf{A_3}$) Soit A et B des anneaux et $\varphi \colon A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif.
   (a) ($\mathbf{A_4}$) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; alors $\varphi(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de B.
   (b) ($\mathbf{A_5}$) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de B ; alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal maximal de A.
3. ($\mathbf{A_6}$) Le polynôme $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ est l'unique polynôme de $\mathbf{F}_2[X]$ de degré 4, réductible et sans racine dans $\mathbf{F}_2$.
4. ($\mathbf{A_7}$) Le polynôme $X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 12X + 21$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[X]$.
5. ($\mathbf{A_8}$) Le polynôme $X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 12X - 10$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[X]$.
6. Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0 et $\iota \colon A \to S^{-1}A$ le morphisme de localisation.
   (a) ($\mathbf{A_9}$) Le morphisme ι est injectif.
   (b) ($\mathbf{A_{10}}$) **(*)** L'application $\mathcal{I} \mapsto \iota^{-1}(\mathcal{I})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux propres de $S^{-1}A$ sur l'ensemble des idéaux $\mathcal{J}$ de A tels que $\mathcal{J} \cap S = \varnothing$.

Exercice 4

Soit $\mathbf{K}$ un corps et n un entier positif tel que $\mathrm{pgcd}(3, n) = 1$.

1. Soit R_0, R_1, R_2 des éléments de $\mathbf{K}[T]$ ($\mathbf{K}$-algèbre des polynôme en une variable T à coefficients dans $\mathbf{K}$). On suppose qu'on a la relation

$$R_0(T^3) + R_1(T^3)T^n + R_2(T^3)T^{2n} = 0.$$

   Montrer que $R_0 = R_1 = R_2 = 0$.

2. Soit $\varphi\colon \mathbf{K}[X, Y] \to \mathbf{K}[T]$ l'unique morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres qui envoie X sur T^n et Y sur T^3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle X^3 - Y^n \rangle$. En déduire que l'idéal $\langle X^3 - Y^n \rangle$ est premier, puis que $X^3 - Y^n$ est un élément irréductible de $\mathbf{K}[X, Y]$.
3. En considérant $X^3 - Y^n$ comme un élément de $\mathbf{K}(Y)[X]$, donner une autre démonstration du fait que $X^3 - Y^n$ est un élément irréductible de $\mathbf{K}[X, Y]$; pourquoi peut-on en déduire que $\langle X^3 - Y^n \rangle$ est un idéal premier de $\mathbf{K}[X, Y]$?

Exercice 5

Soit p un nombre premier et $\mathbf{Z}_{(p)}$ le localisé de l'anneau $\mathbf{Z}$ par rapport au système multiplicatif $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{M}_p := p\mathbf{Z}_{(p)}$ l'idéal engendré par p dans $\mathbf{Z}_{(p)}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{M}_p$ ne contient que des éléments inversibles de $\mathbf{Z}_{(p)}$.
2. En déduire que $\mathfrak{M}_p$ est l'unique idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$.
3. Montrer que le morphisme quotient $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$ se factorise de manière unique par le morphisme de localisation $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{(p)}$.
4. **(*)** En déduire que $\mathbf{Z}_{(p)}/\mathfrak{M}_p$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$.
5. **(*)** Soit q un nombre premier distinct de p. Montrer que les anneaux $\mathbf{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{Z}_{(q)}$ ne sont pas isomorphes.