Université de Rennes 1 Année universitaire 2017-2018
Licence de mathématiques – Module ANAR

Corrigé de l'examen terminal (première session)

Exercice 1

1. *Résoudre le système de congruences d'inconnue* $x \in \mathbf{Z}$: $\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 5 \ [7] \\ x & \equiv & 7 \ [13] \end{array} \right.$.

   On note que $\mathrm{pgcd}(7, 13) = 1$.
   Déterminons une solution particulière du système. Calculons tout d'abord une relation de Bezout pour 7 et 13. Si on ne la voit pas directement, on peut écrire $13 = 7 + 6$, $7 = 6 + 1$ d'où
   $$1 = 7 - 1 \times 6 = 7 - (13 - 7) = 2 \times 7 - 13$$
   Ainsi $1 \equiv -13\,[7]$ et $1 \equiv 2 \times 7\,[13]$ d'où $5 \equiv (-5) \times 13\,[7]$ et $7 \equiv 14 \times 7\,[13]$. Ainsi
   $$x_0 = (-5) \times 13 + 14 \times 7 = 33$$
   est une solution particulière du système. Le système proposé est donc équivalent à $\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & x_0 \ [7] \\ x & \equiv & x_0 \ [13] \end{array} \right.$.
   Comme 7 et 13 sont premiers entre eux, on peut écrire
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & x_0 \ [7] \\ x & \equiv & x_0 \ [13] \end{array} \right. \iff (7|(x-x_0)) \text{ et } (13|(x-x_0)) \iff 7\times 13|(x-x_0) \iff x \equiv x_0\,[7 \times 13]\,.$$
   L'ensemble des solutions du système proposé est donc l'ensemble $33 + 91\mathbf{Z}$.

2. *Résoudre l'équation* $x^3 = 5, \quad x \in A$ *pour les anneaux* A *suivants :* $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$.

Supposons d'abord $A = \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$. Dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$, on a $[0]_{11}^3 = [0]_{11} \neq [5]_{11}$ Par ailleurs 11 est premier donc $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ est un corps. Ainsi
$$\{x \in \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}, \quad x^3 = [5]_{11}\} = \{x \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^\times, \quad x^3 = [5]_{11}\}.$$
Or $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^\times$ est un groupe de cardinal 10, et comme $7 \times 3 \equiv 1\,[10]$, l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^\times$ sur lui-même, de réciproque $x \mapsto x^7$.
Ainsi
$$\{x \in (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^\times, \quad x^3 = [5]_{11}\} = \{[5]_{11}^7\}.$$
Par ailleurs
$$[5]_{11}^7 = (([5]_{11})^2)^2 \times ([5]_{11})^2 \times [5]_{11} = ([25]_{11})^2 \times [25]_{11} \times [5]_{11} = ([3]_{11})^2 \times [3]_{11} \times [5]_{11}$$
$$= [9]_{11} \times [3]_{11} \times [5]_{11} = [5]_{11} \times [5]_{11} = [3]_{11}$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{[3]_{11}\}$.

Considérons à présent le cas où $A = \mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$. On note que $121 = 11^2$.
Soit $a \in \mathbf{Z}$ tel que $[a]_{121}^3 = [5]_{121}$, autrement dit $a^3 \equiv 5\,[121]$. Comme 11 divise 121, on a en particulier $[a]_{11}^3 = [5]_{11}$. D'après ce qui précède, on a donc nécessairement $a \equiv 3\,[11]$. Ainsi
$$\{a \in \mathbf{Z}, \quad [a]_{121}^3 = [5]_{121}\} = \{a \in 3 + 11\mathbf{Z}, \quad [a]_{121}^3 = [5]_{121}\}.$$
Pour $k \in \mathbf{Z}$, considérons $a = 3 + 11k$. D'après la formule du binôme de Newton et comme $121 = 11^2$, on a
$$(3 + 11k)^3 - 3 \equiv 3^3 + 3.3^2.11.k - 3\,[121] \equiv 11(2 + 3.3^2.k)\,[121]$$

Ainsi

$$(3+11k)^3-3\equiv 0\,[121] \Longleftrightarrow 2+3.3^2.k\equiv 0\,[11] \Longleftrightarrow 2+5.k\equiv 0\,[11]$$

Or 5 est inversible modulo 11, d'inverse -2, d'où

$$2+5.k\equiv 0\,[11] \Longleftrightarrow -2\times(2+5.k)\equiv 0\,[11] \Longleftrightarrow -4+k\equiv 0\,[11]$$

Ceci montre que

$$\{a\in 3+11\mathbf{Z},\quad [a]_{121}^3=[5]_{121}\}=3+11(4+11\mathbf{Z})=47+121\mathbf{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\{[47]_{121}\}$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{K}$ un corps à 4 éléments. On note 0 l'élément neutre pour l'addition, 1 l'élément neutre pour la multiplication, et $\mathbf{K}\setminus\{0,1\}=\{\alpha,\beta\}$. En respectant ces notations, donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{K}$. Aucune justification, aucun calcul annexe n'est demandé sur la copie.

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\times$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Exercice 3

Pour chacune des assertions $(\mathbf{A_1})$ à $(\mathbf{A_{10}})$ ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées !

1. *Soit B un anneau et A un sous-anneau de B.*
   (a) $(\mathbf{A_1})$ *On a $A^\times = B^\times\cap A$.*
   FAUX : Prenons $A=\mathbf{Z}$ et $B=\mathbf{Q}$; alors $2\in\mathbf{Z}$ est non nul donc inversible dans $\mathbf{Q}$ (qui est un corps) mais n'est pas un élement de $\mathbf{Z}^\times=\{1,-1\}$.
   (b) $(\mathbf{A_2})$ *Soit $a\in A$ un élément irréductible de A ; alors a est un élément irréductible de B.*
   FAUX : Prenons $A=\mathbf{R}[X]$, $B=\mathbf{C}[X]$, et $a=X^2+1$; a est de degré 2 et n'a pas de racine dans $\mathbf{R}$, donc est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$; cependant dans $\mathbf{C}[X]$, on peut écrire $a=(X+i)(X-i)$ comme produit de deux polynômes de degré 1, donc a n'est pas irréductible dans $\mathbf{C}[X]$
2. $(\mathbf{A_3})$ *Soit A et B des anneaux et $\varphi\colon A\to B$ un morphisme d'anneaux surjectif. NB : $(\mathbf{A_3})$ n'était bien sûr pas une assertion, désolé pour la coquille.*

(a) ($\mathbf{A_4}$) *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; alors $\varphi(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de B.*

FAUX : Prenons $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathfrak{p} = \{0\}$ et φ le morphisme quotient ; φ est bien surjectif et comme $\mathbf{Z}$ est intègre, $\{0\}$ est bien un idéal premier de $\mathbf{Z}$; cependant $\varphi(\{0\}) = \{0\}$ n'est pas un idéal premier de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ car $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ n'est pas intègre.

(b) ($\mathbf{A_5}$) *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de B ; alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal maximal de A.*

VRAI : Considérons $\psi\colon A \to B/\mathfrak{p}$ la composée de φ avec le morphisme quotient $\pi\colon B \to B/\mathfrak{p}$; comme composée de deux morphismes surjectifs, φ est surjectif ; comme le noyau de π est $\mathfrak{p}$, le noyau de ψ est $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$; par le théorème d'isomorphisme, $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est isomorphe à $B/\mathfrak{p}$; comme $\mathfrak{p}$ est maximal, $B/\mathfrak{p}$ est un corps, donc $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est un corps et donc $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est maximal.

3. ($\mathbf{A_6}$) *Le polynôme $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ est l'unique polynôme de $\mathbf{F}_2[X]$ de degré 4, réductible et sans racine dans $\mathbf{F}_2$.*

VRAI : Soit $P \in \mathbf{F}_2[X]$ un polynôme de $\mathbf{F}_2[X]$ de degré 4, réductible et sans racine dans $\mathbf{F}_2$; comme P est réductible, P s'écrit QR, avec $Q, R \in \mathbf{F}_2[X]$ et $\deg(Q), \deg(R) < \deg(P)$; comme P est sans racine dans $\mathbf{F}_2$, Q et R sont également sans racine dans $\mathbf{F}_2$, donc $\deg(Q), \deg(R) \geqslant 2$; comme $4 = \deg(P) = \deg(Q) + \deg(R)$, on a donc nécessairement $\deg(Q) = \deg(R) = 2$. Or les quatre polynômes de degré 2 sur $\mathbf{F}_2[X]$ sont X^2, $X^2 + 1$, $X^2 + X$, $X^2 + X + 1$ et on vérifie aussitôr que parmi eux seul $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbf{F}_2$. Donc $Q = R = X^2 + X + 1$ et $P = (X^2 + X + 1)^2 = X^4 + X^2 + 1$. Réciproquement, comme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbf{F}_2$, $(X^2 + X + 1)^2$ est bien réductible et sans racine dans $\mathbf{F}_2$.

4. ($\mathbf{A_7}$) *Le polynôme $X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 12X + 21$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[X]$.*

VRAI : 3 est un élément irréductible de l'anneau factoriel $\mathbf{Z}$, qui ne divise pas 1 et divise 3, -6, 12, 21, et par ailleurs 3^2 ne divise pas 21 ; le critère d'Eisenstein permet donc de dire que $X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 12X + 21$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$, donc dans $\mathbf{Z}[X]$ car il est unitaire donc primitif.

5. ($\mathbf{A_8}$) *Le polynôme $X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 12X - 10$ est un élément irréductible de $\mathbf{Z}[X]$.*

FAUX : Le polynôme en question s'annule en 1 ; comme il est de degré strictement supérieur à 1, c'est donc un élément réductible de $\mathbf{Q}[X]$, et donc de $\mathbf{Z}[X]$ d'après le cours.

6. *Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0 et $\iota\colon A \to S^{-1}A$ le morphisme de localisation.*

(a) ($\mathbf{A_9}$) *Le morphisme ι est injectif.*

FAUX : Prenons $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ et $S = \mathbf{Q}^\times \times \{0, 1\}$, dont on vérifie facilement que c'est une partie multiplicative ne contenant pas 0. Comme $(1, 0) \times (0, 1) = 0$, on a $0 = \iota((1, 0) \times (0, 1)) = \iota((1, 0))\iota((0, 1))$. Or $(1, 0) \in S$ donc $\iota((1, 0))$ est inversible, donc $\iota((0, 1)) = 0$ et ι n'est pas injectif.

(b) ($\mathbf{A_{10}}$) *(*) L'application $\mathcal{I} \mapsto \iota^{-1}(\mathcal{I})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux propres de $S^{-1}A$ sur l'ensemble des idéaux $\mathcal{J}$ de A tels que $\mathcal{J} \cap S = \varnothing$.*

FAUX : Prenons $A = \mathbf{Z}$, $S = \mathbf{Z} \setminus 2\mathbf{Z}$ et montrons que l'application en question n'est pas surjective. L'idéal $\mathcal{J} := 6\mathbf{Z}$ est contenu dans $2\mathbf{Z}$ et donc ne rencontre pas S. Supposons qu'il existe un idéal propre $\mathcal{I}$ de $S^{-1}\mathbf{Z}$ tel que $\iota^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{J}$. Alors $\mathcal{I}$ contient $\iota(6) = \iota(3) \times \iota(2)$ et comme $\iota(3)$ est inversible, $\mathcal{I}$ contient $\iota(2)$; donc $2 \in \iota^{-1}(\mathcal{I})$, or $2 \notin \mathcal{J}$, contradiction.

Exercice 4

Soit $\mathbf{K}$ *un corps et* n *un entier positif tel que* $\operatorname{pgcd}(3,n)=1$.

1. *Soit* R_0, R_1, R_2 *des éléments de* $\mathbf{K}[T]$ *(*$\mathbf{K}$*-algèbre des polynôme en une variable* T *à coefficients dans* $\mathbf{K}$*). On suppose qu'on a la relation*

$$R_0(T^3)+R_1(T^3)T^n+R_2(T^3)T^{2n}=0.$$

Montrer que $R_0=R_1=R_2=0$.

Si $R_0=R_1=0$, il vient aussitôt $R_2(T^3)=0$ d'où $R_2=0$.

Supposons à présent $R_0\neq 0$ ou $R_1\neq 0$. Alors $3\deg(R_0)$ et $3\deg(R_1)+n$ sont distincts : c'est clair si R_0 ou R_1 est nul, et sinon l'égalité $3\deg(R_0)=3\deg(R_1)+n$ entraîne que 3 divise n ce qui contredit $\operatorname{pgcd}(3,n)=1$. On en déduit que

$$\deg(R_0(T^3)+R_1(T^3)T^n)=\operatorname{Max}(3\deg(R_0),3\deg(R_1)+n)\in\mathbf{N}$$

puis que (utilisant la relation de l'énoncé)

$$3\deg(R_2)+2n=\operatorname{Max}(3\deg(R_0),3\deg(R_1)+n).$$

En particulier $\deg(R_2)\in\mathbf{N}$. Si $3\deg(R_2)+2n=3\deg(R_0)$, on en déduit donc que 3 divise $2n$, donc n car $\operatorname{pgcd}(2,3)=1$, ce qui contredit $\operatorname{pgcd}(3,n)=1$. Si $3\deg(R_2)+2n=3\deg(R_1)+n$, on en déduit que 3 divise n, ce qui là encore contredit $\operatorname{pgcd}(3,n)=1$.

On a donc bien $R_0=R_1=R_2=0$.

2. *Soit* $\varphi\colon\mathbf{K}[X,Y]\to\mathbf{K}[T]$ *l'unique morphisme de* $\mathbf{K}$*-algèbres qui envoie* X *sur* T^n *et* Y *sur* T^3*. Montrer que* $\operatorname{Ker}(\varphi)=\langle X^3-Y^n\rangle$*. En déduire que l'idéal* $\langle X^3-Y^n\rangle$ *est premier, puis que* X^3-Y^n *est un élément irréductible de* $\mathbf{K}[X,Y]$.

On a $\varphi(X^3-Y^n)=(T^n)^3-(T^3)^n=T^{3n}-T^{3n}=0$ donc $X^3-Y^n\in\operatorname{Ker}(\varphi)$. Comme $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un idéal de $\mathbf{K}[X,Y]$, on a l'inclusion $\langle X^3-Y^n\rangle\subset\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P\in\operatorname{Ker}(\varphi)$. Vu comme polynôme en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}[Y]$, X^3-Y^n est unitaire de degré 3. On sait donc qu'il existe $Q\in\mathbf{K}[X,Y]$ et $R\in\mathbf{K}[X,Y]$, avec $\deg_X(R)\leqslant 2$ tel que $P=(X^3-Y^n)Q+R$. Il existe en particulier R_0, R_1, $R_2\in\mathbf{K}[Y]$ tels que $R=R_0(Y)+R_1(Y)X+R_2(Y)X^2$. On a par ailleurs

$$0=\varphi(P)=\varphi(X^3-Y^n)\varphi(Q)+\varphi(R_0(Y))+\varphi(R_1(Y))\varphi(X)+\varphi(R_2(Y))\varphi(X^2)$$

soit

$$0=0.\varphi(Q)+R_0(T^3)+R_1(T^3)T^n+R_2(T^3)T^{2n}.$$

D'après la question précédente, on a $R_0=R_1=R_2=0$, donc $R=0$ d'où $P=(X^3-Y^n)Q$ soit finalement $P\in\langle X^3-Y^n\rangle$.

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi)\subset\langle X^3-Y^n\rangle$ et finalement $\operatorname{Ker}(\varphi)=\langle X^3-Y^n\rangle$.

Par le théorème d'isomorphisme, les anneaux $\mathbf{K}[X,Y]/\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$ sont isomorphes. Or $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un sous-anneau de $\mathbf{K}[T]$, qui est intègre. Donc $\operatorname{Im}(\varphi)$ est intègre, et finalement $\mathbf{K}[X,Y]/\operatorname{Ker}(\varphi)$ est intègre. Donc $\operatorname{Ker}(\varphi)=\langle X^3-Y^n\rangle$ est premier.

On sait que dans n'importe quel anneau intègre, un élément non nul qui engendre un idéal premier est irréductible. Donc X^3-Y^n est irréductible.

3. *En considérant* X^3-Y^n *comme un élément de* $\mathbf{K}(Y)[X]$*, donner une autre démonstration du fait que* X^3-Y^n *est un élément irréductible de* $\mathbf{K}[X,Y]$ *; pourquoi peut-on en déduire que* $\langle X^3-Y^n\rangle$ *est un idéal premier de* $\mathbf{K}[X,Y]$ *?*

Vu comme élément de $\mathbf{K}(Y)[X]$, $P := X^3 - Y^n$ est de degré 3 ; il est donc irréductible dans $\mathbf{K}(Y)[X]$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbf{K}(Y)$. Soit $A, B \in \mathbf{K}[Y]$, avec $B \neq 0$, tels que $P(\frac{A}{B}) = 0$. On a donc $\frac{A^3}{B^3} = Y^n$, d'où $A^3 = B^3 Y^n$. Ainsi A est non nul et en prenant les degrés on trouve $3\deg(A) = 3\deg(B) + n$, donc 3 divise n, contradiction. On en conclut que P est bien irréductible dans $\mathbf{K}(Y)[X]$. Vu comme polynôme en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}[Y]$, P est unitaire donc primitif. Donc P est un élément irréductible de $\mathbf{K}[Y][X] = \mathbf{K}[X, Y]$.

Comme $\mathbf{K}[X, Y]$ est factoriel, tout élément irréductible engendre un idéal premier.

Exercice 5

Soit p un nombre premier et $\mathbf{Z}_{(p)}$ le localisé de l'anneau $\mathbf{Z}$ par rapport au système multiplicatif $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{M}_p := p\mathbf{Z}_{(p)}$ l'idéal engendré par p dans $\mathbf{Z}_{(p)}$.

1. *Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{M}_p$ ne contient que des éléments inversibles de $\mathbf{Z}_{(p)}$.*

   Soit $x \in \mathbf{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{M}_p$, que l'on écrit $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$. Si $a \in p\mathbf{Z}$, on voit aussitôt que $x \in \mathfrak{M}_p$.

   Supposons à présent $x \in \mathbf{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{M}_p$. En particulier $a \notin p\mathbf{Z}$, donc $\frac{b}{a}$ est un élément de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Comme $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1$, ceci montre que x est inversible dans $\mathbf{Z}_{(p)}$.

2. *En déduire que $\mathfrak{M}_p$ est l'unique idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$.*

   Montrons que $\mathfrak{M}_p$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Comme $1 \notin \mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_p$ est un idéal propre de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbf{Z}_{(p)}$ contenant strictement $\mathfrak{M}_p$. En particulier $\mathcal{I}$ rencontre $\mathbf{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{M}_p$, donc $\mathbf{Z}_{(p)}^{\times}$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{I} = \mathbf{Z}_{(p)}$. Ceci achève de montrer que $\mathfrak{M}_p$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$.

   Soit $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. En particulier, $\mathcal{I}$ est propre, donc $\mathcal{I}$ ne recontre pas $\mathbf{Z}_{(p)}^{\times}$. D'après la question précédente, $\mathcal{I}$ est inclus dans $\mathfrak{M}_p$. Comme $\mathfrak{M}_p$ est propre et $\mathcal{I}$ est maximal, on a $\mathcal{I} = \mathfrak{M}_p$.

   Ainsi $\mathfrak{M}_p$ est bien l'unique idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$.

3. *Montrer que le morphisme quotient $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$ se factorise de manière unique par le morphisme de localisation $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{(p)}$.*

   Par la propriété universelle du localisé, il suffit de montrer que le morphisme quotient envoie $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{F}_p^{\times}$. Mais ceci n'est rien d'autre que le fait que, p étant premier, un entier est inversible modulo p si et seulement s'il est non divisible par p.

4. *(*) En déduire que $\mathbf{Z}_{(p)}/\mathfrak{M}_p$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$.*

   Notons $\varphi_p \colon \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{F}_p$ le morphisme obtenu à la question précédente. Comme le morphisme quotient $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$ est surjectif, φ_p l'est également. En particulier $\mathbf{Z}_{(p)}/\operatorname{Ker}(\varphi_p)$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$. Comme $\mathbf{F}_p$ est un corps, $\operatorname{Ker}(\varphi_p)$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. D'après la question 2, $\operatorname{Ker}(\varphi_p) = \mathfrak{M}_p$, ce qui conclut.

5. *(*) Soit q un nombre premier distinct de p. Montrer que les anneaux $\mathbf{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{Z}_{(q)}$ ne sont pas isomorphes.*

   Supposons qu'il existe un isomorphisme $\psi \colon \mathbf{Z}_{(q)} \to \mathbf{Z}_{(p)}$. Composant ψ avec le morphisme φ_p (*cf.* question précédente), on obtient un morphisme surjectif $\psi_p \colon \mathbf{Z}_{(q)} \to \mathbf{F}_p$. Comme $\mathbf{F}_p$ est un corps, le noyau de ψ_p est nécessairement $\mathfrak{M}_q$. Donc $\mathbf{Z}_{(q)}/\mathfrak{M}_q$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$, et d'après la question précédente, on en déduit que $\mathbf{F}_q$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$. Pour des raisons de cardinal, ceci est contradictoire si q est distinct de p.