

**Feuille de TD n°4**

**Exercice 1**

Soit  $p$  un nombre premier. Trouver tous les couples d'entiers non nuls  $(x, y)$  vérifiant  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ .

**Exercice 2**

On revient dans cet exercice sur l'exemple introductif du chapitre sur la localisation. Soit  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  contenant  $x_0$  et  $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  l'anneau des fonctions continues sur  $I$  à valeurs réelles. Soit

$$\mathcal{I}_{x_0} := \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R}), f(x_0) = 0\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{I}_{x_0}$  est un idéal maximal de  $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ .
2. Soit  $S := \mathcal{C}(I, \mathbf{R}) \setminus \mathcal{I}_{x_0}$ . Montrer que l'anneau localisé  $S^{-1}\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  est isomorphe à l'anneau  $\mathcal{C}(x_0, \mathbf{R})$  des germes de fonctions continues en  $x_0$ , et que le morphisme de localisation est  $f \mapsto (I, f)$ .

*Indication :* montrer qu'on a  $\frac{f}{1} = 0$  dans  $S^{-1}\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$  si et seulement si  $f$  est nulle au voisinage de  $x_0$ .

**Exercice 3**

Soit  $A$  un anneau et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ .

1. On suppose qu'il existe  $s \in A$  tel que  $S = \{s^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ . Montrer que les  $A$ -algèbres  $S^{-1}A$  et  $A[X]/\langle sX - 1 \rangle$  sont isomorphes.
2. Soit  $\iota: A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme de localisation. Montrer que l'application  $\mathfrak{q} \mapsto \iota^{-1}\mathfrak{q}$  est une bijection strictement croissante de l'ensemble des idéaux premiers de  $S^{-1}A$  sur l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  qui ne rencontrent pas  $S$ .
3. On suppose que  $S = A \setminus \mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ . Montrer que  $S^{-1}A$  est un anneau local (*cf.* l'exercice 9 de la feuille de TD n°1), d'idéal maximal l'idéal engendré par l'image de  $\mathfrak{p}$  dans  $S^{-1}A$ . Décrire  $S^{-1}A$  dans le cas où  $A = \mathbf{Z}$ ,  $p$  est un nombre premier et  $\mathfrak{p} = p\mathbf{Z}$ .
4. Soit  $x$  un élément non nilpotent de  $A$  (*cf.* l'exercice 10 de la feuille de TD n°1). Dédurre de la question précédente qu'il existe un idéal premier de  $A$  qui ne contient pas  $x$  (*cf.* la question 7 de l'exercice précité).

**Exercice 4**

On rappelle que l'anneau total des fractions d'un anneau  $A$  est le localisé de  $A$  par rapport à l'ensemble des éléments qui ne sont pas des diviseurs de zéros. Quel est l'anneau total des fractions de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  ( $n$  entier positif) ? de  $A \times B$ , où  $A$  et  $B$  sont des anneaux intègres ?

**Exercice 5**

Soit  $A$  un anneau intègre et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  ne contenant pas  $0_A$ . Soit  $\mathbf{K}$  un corps contenant  $A$  comme sous-anneau. Soit

$$B := \{a s^{-1}\}_{(a,s) \in A \times S} \subset \mathbf{K}.$$

Montrer que  $B$  est un sous-anneau de  $\mathbf{K}$  contenant  $A$ , que  $B = S^{-1}A$  et que le morphisme de localisation est le morphisme déduit de l'inclusion de  $A$  dans  $B$ .

### Exercice 6

Soit  $A$  un anneau et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . Soit  $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$  le morphisme de localisation. Soit

$$\mathcal{I}_S = \{a \in A, \exists s \in S, sa = 0\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{I}_S$  est un idéal de  $A$
2. Montrer qu'on a  $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{I}_S$ .
3. En déduire les propriétés suivantes :
  - (a) si  $A$  est intègre et  $S$  ne contient pas  $0_A$ , le morphisme de localisation est injectif;
  - (b)  $S^{-1}A$  est l'anneau nul si et seulement si  $S$  contient  $0_A$ .
4. On suppose de cette question que  $A = B \times C$ , où  $B$  et  $C$  sont des anneaux. Soit  $T$  une partie multiplicative de  $C$  contenant  $0$  (par exemple  $T = \{1, 0\}$ ). Montrer que  $S := B^\times \times T$  est une partie multiplicative de  $B \times C$ , que  $\mathcal{I}_S = \{0\} \times C$  et que le morphisme de localisation est le morphisme de projection  $B \times C \rightarrow B$ .

### Exercice 7

1. Montrer que la caractéristique d'un anneau intègre est soit nulle, soit un nombre premier
2. Soit  $p$  un nombre premier et  $A$  un anneau de caractéristique  $p$ . Montrer que  $x \mapsto x^p$  est un morphisme d'anneaux. On l'appelle le morphisme de Frobenius de  $A$ . Vérifier que ce morphisme est injectif si  $A$  est intègre.
3. Soit  $\mathbf{K}$  un corps. On dit que  $\mathbf{K}$  est parfait s'il est de caractéristique 0 ou s'il est de caractéristique non nulle et le morphisme de Frobenius de  $\mathbf{K}$  est bijectif. Montrer qu'un corps fini est un corps parfait.
4. Soit  $\mathbf{K}$  un corps parfait et  $P \in \mathbf{K}[X]$ . Montrer que  $P$  est sans facteur multiple si et seulement si  $\text{pgcd}(P, P') = 1$ .
5. Soit  $\mathbf{K}$  un corps et  $n$  un entier strictement positif. On note  $\mathbf{K}[X^n]$  l'image dans  $\mathbf{K}[X]$  de l'unique morphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres  $\mathbf{K}[X] \rightarrow \mathbf{K}[X]$  qui envoie  $X$  sur  $X^n$ . Montrer qu'un élément de  $\mathbf{K}[X]$  est dans  $\mathbf{K}[X^n]$  si et seulement si ses coefficients d'indice non multiple de  $n$  sont tous nuls. Montrer que les  $\mathbf{K}$ -algèbres  $\mathbf{K}[X^n]$  et  $\mathbf{K}[X]$  sont isomorphes.
6. Soit  $\mathbf{K}$  un corps fini de caractéristique  $p$  et  $\mathbf{L} := \mathbf{K}(T)$  le corps des fractions rationnelles en une indéterminée à coefficients dans  $\mathbf{K}$ .
  - (a) Montrer que  $T$  n'est pas dans l'image du morphisme de Frobenius de  $\mathbf{L}$ .
  - (b) Soit  $\mathbf{M} = \mathbf{K}(U)$  le corps des fractions rationnelles en une indéterminée  $U$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . Montrer qu'il existe un unique morphisme de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{M}$  qui envoie  $T$  sur  $U^p$ . On identifie désormais  $\mathbf{L}$  à un sous-corps de  $\mathbf{M}$ . Montrer que  $U \notin \mathbf{L}$ .
  - (c) On considère le polynôme  $P := X^p - T \in \mathbf{L}[X]$ . Soit  $Q \in \mathbf{L}[X]$  un diviseur non constant de  $P$ . Montrer qu'il existe  $1 \leq r \leq p$  tel que  $Q = (X - U)^r$ . En déduire que  $r = p$  et que  $P$  est irréductible.
  - (d) Le polynôme  $P$  a-t-il des facteurs multiples? Que vaut  $\text{pgcd}(P, P')$ ?