

**Feuille de TD n°2**

**Exercice 1**

Soit  $A$  un anneau et  $a$  un élément de  $A$ . Montrer que le sous-anneau de  $A$  engendré par  $\{a\}$  est  $\mathbf{Z}[a]$  (image de  $\mathbf{Z}[X]$  par l'unique morphisme d'anneaux  $\mathbf{Z}[X] \rightarrow A$  qui envoie  $X$  sur  $a$ ). Généraliser au sous-anneau engendré par une partie finie  $S$  de  $A$ .

**Exercice 2**

Soit  $E$  un ensemble et  $(A_e)_{e \in E}$  une famille d'anneaux indexée par  $E$ ,  $B := \prod_{e \in E} A_e$  l'anneau produit. Pour tout  $e \in E$ , on note  $\pi_e: B \rightarrow A_e$  le morphisme d'anneaux donné par la projection sur  $A_e$ . Soit  $C$  un anneau. Montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, B) & \longrightarrow & \prod_{e \in E} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, A_e) \\ \varphi & \longmapsto & (\pi_e \circ \varphi)_{e \in E} \end{array} .$$

**Exercice 3**

1. Soit  $n$  un entier positif. Décrire tous les idéaux de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et les relations d'inclusion entre ces idéaux.
2. Soit  $\mathbf{K}$  un corps. Décrire tous les idéaux de  $\mathbf{K}[X]/\langle X^4 + 3X^3 + 2X^2 \rangle$  et les relations d'inclusion entre ces idéaux.

**Exercice 4**

On note  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

1. Montrer que cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication ponctuelle, est un anneau.
2. Soit  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), f(x_0) = 0\}$  est un idéal maximal de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .
3. Soit

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \forall n \in \mathbf{N}, f^{(n)}(x_0) = 0\}$$

Montrer que  $\mathcal{I}$  est un idéal premier non nul de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  (idéal des fonctions « plates » en  $x_0$ ), et construire un morphisme injectif de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})/\mathcal{I}$  vers  $\mathbf{R}[[X]]$ . *Note* : on peut en fait construire un isomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})/\mathcal{I}$  sur  $\mathbf{R}[[X]]$  (théorème de Borel).

4. (si vous connaissez la notion de fonction holomorphe) Que se passe-t-il si on s'intéresse aux objets analogues quand on remplace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  par l'anneau des fonctions holomorphes sur  $\mathbf{C}$  ?

**Exercice 5**

On désigne par  $i$  un élément de  $\mathbf{C}$  tel que  $i^2 = -1$ . Soit  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  l'image dans  $\mathbf{C}$  de l'unique morphisme d'anneaux  $\mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{C}$  qui envoie  $X$  sur  $i\sqrt{3}$ .

1. Montrer que  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  est un anneau intègre isomorphe à  $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 + 3 \rangle$  et que

$$\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3}\}_{(a,b) \in \mathbf{Z}^2}.$$

2. Montrer que l'application

$$N: \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[i\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ z & \longmapsto & z\bar{z} \end{array}$$

est bien définie et vérifie

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]^2, \quad N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2).$$

En déduire les éléments de  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]^\times$ .

3. Montrer que l'équation

$$a^2 + 3b^2 = 2, \quad (a, b) \in \mathbf{Z}^2$$

n'a pas de solution. En déduire que 2 est un élément irréductible de  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ .

4. Montrer que  $2\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  n'est pas un idéal premier de  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  de deux façons différentes :
  - (a) en calculant le quotient  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]/2\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  ;
  - (b) en utilisant la relation  $4 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$ .

### Exercice 6

Soit  $p$  un nombre premier et

$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}_{a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}}$$

(cf. l'exercice 7.3 de la feuille 1). Décrire l'ensemble des éléments irréductibles de  $\mathbf{Z}_{(p)}$ . Combien y a-t-il de classes d'éléments irréductibles pour la relation d'association ? Énoncer et démontrer un théorème de « factorisation unique » dans  $\mathbf{Z}_{(p)}$ .

### Exercice 7

Soit  $x$  un entier non nul et  $\mathbf{Z}[\frac{1}{x}]$  l'image de  $\mathbf{Z}[X]$  par l'unique morphisme d'anneaux de  $\mathbf{Z}[X]$  vers  $\mathbf{Q}$  envoyant  $X$  sur  $\frac{1}{x}$  (cf. l'exercice 7.2 de la feuille 1). Décrire l'ensemble des classes d'éléments irréductibles pour la relation d'association. Énoncer et démontrer un théorème de « factorisation unique » dans  $\mathbf{Z}[\frac{1}{x}]$ .

### Exercice 8

Résoudre l'équation  $x^3 = 2$ ,  $x \in A$  où  $A$  désigne successivement l'un des anneaux suivants (et 2 désigne l'image de 2 dans  $A$  par l'unique morphisme d'anneaux  $\mathbf{Z} \rightarrow A$ ) :

$$\mathbf{R}, \quad \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}[X]/\langle X^3 - 2 \rangle, \quad \mathbf{C}, \quad \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \quad (n \in \{5, 10, 35, 25, 125\})$$

### Exercice 9

Pour tout anneau  $A$ , on note  $\text{car}(A) \in \mathbf{N}$  la caractéristique de  $A$ .

1. Soit  $A$  un anneau et  $n$  un entier positif. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $A$  est de caractéristique  $n$  ;
  - (b) (si  $n > 0$ )  $1_A$  est d'ordre  $n$  en tant qu'élément du groupe  $(A, +)$  ;
  - (c)  $A$  contient un sous-anneau isomorphe à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .
2. Donner les caractéristiques de l'anneau nul, de  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).
  3. Montrer que la caractéristique d'un anneau intègre est soit nulle, soit un nombre premier.
  4. Soit  $A$  un anneau et  $B$  un sous anneau de  $A$ . Montrer que  $\text{car}(A) = \text{car}(B)$ .
  5. Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux. Montrer que  $\text{car}(B)$  divise  $\text{car}(A)$ .
  6. Soit  $A$  un anneau. Exprimer  $\text{car}(A[X])$  en fonction de  $\text{car}(A)$ .
  7. Soit  $A$  et  $B$  des anneaux. Exprimer  $\text{car}(A \times B)$  en fonction de  $\text{car}(A)$  et  $\text{car}(B)$ .
  8. Soit  $E$  un ensemble et  $A$  un anneau. Exprimer  $\text{car}(A^E)$  en fonction de  $\text{car}(A)$ .
  9. Soit  $E$  un ensemble et  $(A_e)_{e \in E}$  une famille d'anneaux indexée par  $E$ . Exprimer  $\text{car}(\prod_{e \in E} A_e)$  en fonction des  $\text{car}(A_e)$ .
  10. Soit  $p$  un nombre premier et  $A$  un anneau de caractéristique  $p$ . Montrer que  $x \mapsto x^p$  est un morphisme d'anneaux. Donner un exemple d'un anneau de caractéristique 4 pour lequel  $x \mapsto x^4$  n'est pas un morphisme d'anneaux.

### Exercice 10

On désigne par  $i$  un élément de  $\mathbf{C}$  tel que  $i^2 = -1$ . Soit  $\mathbf{Z}[i]$  l'image de l'unique morphisme d'anneaux  $\mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{C}$  qui envoie  $X$  sur  $i$  (cf. l'exercice 7.1 de la feuille 1).

1. Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes, et qu'elles sont entraînées par la condition «  $p$  n'est pas un élément irréductible de  $\mathbf{Z}[i]$  ».
  - (a)  $p\mathbf{Z}[i]$  n'est pas un idéal premier de  $\mathbf{Z}[i]$  ;
  - (b)  $-1$  est un carré modulo  $p$ .
2. Soit  $z \in \mathbf{Z}[i]$ . Montrer que  $z \in \mathbf{Z}[i]^\times$  si et seulement si  $N(z) = 1$  (cf. l'exercice 7.1 de la feuille 1).
3. Soit  $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i]$  tels que  $N(z_1) = N(z_2)$  et  $z_1$  divise  $z_2$ . Montrer que  $z_1$  et  $z_2$  sont associés.
4. Soit  $z \in \mathbf{Z}[i]$  tel que  $N(z)$  est un nombre premier. Montrer que  $z$  est un élément irréductible de  $\mathbf{Z}[i]$ .
5. Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p$  est une somme de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe  $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $p = a^2 + b^2$ . Montrer que  $-1$  est un carré modulo  $p$ , et que  $p$  n'est pas un élément irréductible de  $\mathbf{Z}[i]$ .
6. On admet (provisoirement) la propriété  $(\mathcal{P})$  suivante : soit  $(a, b, c) \in \mathbf{Z}[i]^3$  ; on suppose que  $a$  et  $b$  sont irréductibles, non associés, et divisent  $c$  ; alors  $ab$  divise  $c$ . Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  - (a)  $p$  n'est pas un élément irréductible de  $\mathbf{Z}[i]$  ;
  - (b)  $p\mathbf{Z}[i]$  n'est pas un idéal premier de  $\mathbf{Z}[i]$  ;
  - (c)  $-1$  est un carré modulo  $p$  ;
  - (d)  $p$  est une somme de deux carrés.
7. Montrer que l'analogie de la propriété  $(\mathcal{P})$  pour  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  est fautive (cf. exercice 5 de cette feuille).

**Exercice 11**

1. Soit  $A$  un anneau et  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$  trois idéaux de  $A$ , supposé deux à deux étrangers. Montrer que les idéaux  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3$  sont étrangers. En déduire que  $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3$  et que le morphisme naturel

$$A \rightarrow A/\mathcal{I}_1 \times A/\mathcal{I}_2 \times A/\mathcal{I}_3$$

est surjectif.

2. Démontrer la version générale du théorème chinois énoncée en cours.
3. Résoudre les systèmes de congruences suivants d'inconnue  $x \in \mathbf{Z}$  :

$$(1) \begin{cases} x \equiv 3 & [12] \\ x \equiv 3 & [21] \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \equiv 5 & [15] \\ x \equiv 4 & [14] \\ x \equiv 3 & [13] \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x \equiv 1 & [25] \\ x \equiv 5 & [13] \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x \equiv 1 & [10] \\ x \equiv 5 & [15] \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x \equiv 17 & [21] \\ x \equiv 2 & [6] \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 9x \equiv 2 & [15] \\ x \equiv 6 & [17] \end{cases}$$

**Exercice 12**

1. Soit  $A$  un anneau. On note  $\iota: A \rightarrow A[X]$  le morphisme d'anneaux injectif naturel. Soit  $C$  un anneau,  $\theta \in \text{Hom}_{\text{anneaux}}(A, C)$  et  $c \in C$ . On suppose que le triplet  $(C, \theta, c)$  vérifie la propriété suivante : pour tout anneau  $B$ , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{anneaux}}(C, B) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B) \times B \\ \varphi &\longmapsto (\varphi \circ \theta, \varphi(c)) \end{aligned}$$

est une bijection. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'anneaux  $\psi: A[X] \rightarrow C$  tel que  $\psi \circ \iota = \theta$  et qui envoie  $X$  sur  $c$ .

2. Soit  $A$  un anneau,  $C$  une  $A$ -algèbre et  $c \in C$ . On suppose que le couple  $(C, c)$  vérifie la propriété suivante : pour toute  $A$ -algèbre  $B$ , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A\text{-algèbres}}(C, B) &\longrightarrow B \\ \varphi &\longmapsto \varphi(c) \end{aligned}$$

est une bijection. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de  $A$ -algèbres de  $A[X]$  vers  $C$  qui envoie  $X$  sur  $c$ .

3. Comparer les deux énoncés.