Université de Rennes 1 — Année universitaire 2017-2018
Licence de mathématiques
Module Anneaux et Arithmétique

Feuille de TD n°1

On rappelle que dans ce module, le terme *anneau* est synonyme d'*anneau commutatif unitaire*.

Exercice 1

Soit E un ensemble et A un anneau. L'ensemble A^E des applications de E vers A est muni de l'addition et de la multiplication « terme à terme » induites par celles de A

1. Montrer que A^E muni de ces lois est un anneau.
2. On suppose que E est vide ; identifier A^E. Même question si E est de cardinal 1.
3. On suppose que E est un ensemble fini. Soit n le cardinal de E. Montrer que A^E est isomorphe à l'anneau produit A^n.
4. Montrer que l'ensemble des applications constantes de E vers A est un sous-anneau de A^E isomorphe à A.
5. Décrire $(A^E)^\times$.
6. Soit $A^{(E)}$ l'ensemble des applications presque nulles de E vers A, c'est-à-dire
$$A^{(E)} = \{\varphi \in A^E, \{e \in E, \varphi(e) \neq 0\} \text{ est fini}\}.$$
Est-ce que $A^{(E)}$ est un sous-anneau de A^E ?

Exercice 2

Soit A un anneau.

1. Soit E un ensemble et $(A_e)_{e\in E}$ une famille de sous-anneaux de A indexée par E. Montrer que $\cap_{e\in E} A_e$ est un sous-anneau de A.
2. Soit B et C deux sous-anneaux de A. Montrer par des exemples qu'en général ni $B \cup C$ ni $B + C = \{b + c\}_{(b,c)\in B\times C}$ ne sont des sous-anneaux de A.
3. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer que $\mathcal{I} = A$ si et seulement si $1 \in \mathcal{I}$ si et seulement si $\mathcal{I} \cap A^\times \neq \varnothing$.
4. Soit E un ensemble et $(\mathcal{I}_e)_{e\in E}$ une famille d'idéaux de A indexée par E. Montrer que $\cap_{e\in E}\mathcal{I}_e$ est un idéal de A.
5. Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}+\mathcal{J} = \{a+b\}_{(a,b)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}}$ et $\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}$ (ensemble des sommes finies de produits d'un élément de $\mathcal{I}$ par un élément de $\mathcal{J}$) sont des idéaux de A.
   (b) Généraliser au cas d'une famille d'idéaux indexée par un ensemble fini.
   (c) Montrer par un exemple qu'en général $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ n'est pas un idéal de A.
   (d) Montrer que $\mathcal{I}.\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Montrer par un exemple que l'inclusion est stricte en général. Montrer qu'on a égalité si $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$.

Exercice 3

Soit E un ensemble et $(A_e)_{e\in E}$ une famille d'anneaux indexée par E. On munit l'ensemble produit $\prod_{e\in E} A_e$ de deux lois « terme à terme » induites respectivemet par les additions et multiplications des anneaux A_e.

1. Montrer que l'ensemble $\prod_{e\in E} A_e$ muni de ces lois est un anneau.
2. Soit $f \in E$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \prod_{e\in E} A_e & \longrightarrow & A_f \\ (a_e)_{e\in E} & \longmapsto & a_f \end{array}$$

   est un morphisme d'anneaux.
3. Décrire $(\prod_{e\in E} A_e)^{\times}$.
4. Montrer que $\prod_{e\in E} A_e$ est intègre si et seulement si l'ensemble des éléments $e \in E$ tel que A_e n'est pas l'anneau nul possède un unique élément f tel qu'en outre A_f est intègre.

Exercice 4

Soit A et B des anneaux et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit $a \in A$ et $n \in \mathbf{Z}$. Montrer qu'on a $\varphi(n \cdot a) = n \cdot \varphi(a)$.
2. Soit $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'on a $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$.
3. Dans cette question on suppose φ bijectif. Montrer que φ^{-1} est un morphisme d'anneaux.
4. Soit C un anneau et $\psi\colon B \to C$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'anneaux.
5. Montrer que $\varphi(A^{\times}) \subset B^{\times}$. Montrer par un exemple que l'inclusion est stricte en général.
6. Soit C un sous-anneau de A. Montrer que $\varphi(C)$ est un sous-anneau de B.
7. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer par un exemple qu'en général $\varphi(\mathcal{I})$ n'est pas un idéal de B.
8. On suppose dans cette question φ surjectif. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer que $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de B.
9. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
10. Soit $\mathcal{J}$ un idéal premier de B. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal premier de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
11. Dans cette question on suppose φ surjectif. Montrer que l'application $\mathcal{J} \mapsto \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de B sur l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
12. Soit $\mathcal{J}$ un idéal maximal de B. Montrer par un exemple qu'en général $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ n'est pas un idéal maximal de A.

Exercice 5

Anneaux de polynômes et de séries formelles

Soit A un anneau. L'ensemble $A^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans A est muni de l'addition « terme à terme » induite par celle de A et de la multiplication $\times$ définie ainsi : soit $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^N$ et $\boldsymbol{b} = (b_n) \in A^{\mathbf{N}}$; alors $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ est la suite $\boldsymbol{c} = (c_n) \in A^{\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1. Montrer que $A^{\mathbf{N}}$ muni des lois décrites ci-dessus est un anneau.
2. Montrer que l'ensemble $A^{(\mathbf{N})}$ des suites presques nulles à valeurs dans A est un sous-anneau de $A^{\mathbf{N}}$.
3. Montrer que l'ensemble des suites à valeurs dans A dont tous les termes d'indice strictement positif sont nuls est un sous-anneau de $A^{(\mathbf{N})}$ isomorphe à A. On identifiera par la suite l'anneau A à ce sous-anneau.
4. On note X l'élément de $A^{(\mathbf{N})}$ défini par $X(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $X(n) = 0$. Soit $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^{(\mathbf{N})}$. Justifier que l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ a un sens et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n = \boldsymbol{a}$. On note $A^{(\mathbf{N})} = A[X]$ et $A^{\mathbf{N}} = A[[X]]$. Pour tout $\boldsymbol{a} = (a_n) \in A^{\mathbf{N}}$, on note
$$\boldsymbol{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n.$$
5. Montrer que $A[[X]]$ est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre si et seulement si A est intègre.
6. On suppose A intègre. Montrer que $A[X]^\times = A^\times$.
7. En considérant par exemple le cas où $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, montrer qu'en général si A n'est pas intègre il existe des éléments de $A[X]^\times$ qui ne sont pas des polynômes constants (*cf.* aussi l'exercice 10).
8. Soit $x \in A$. Montrer que l'application $A[X] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[X]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie et est un morphisme d'anneaux.
9. Montrer que l'application $A[[X]] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[[X]]$ associe a_0 est un morphisme d'anneaux. Plus généralement, soit $x \in A$ un élément nilpotent (c'est-à-dire : il existe un entier strictement positif m tel que $x^m = 0$). Montrer que l'application $A[[X]] \to A$ qui à $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A[[X]]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie et est un morphisme d'anneaux.
10. Montrer que
$$A[[X]]^\times = \{(a_n) \in A^{\mathbf{N}}, \quad a_0 \in A^\times\}.$$
Quel est l'inverse de $1 - X$ dans $A[[X]]$?
11. On suppose dans cette question que A est un corps. Montrer que l'idéal $X \cdot A[[X]]$ est un idéal maximal de $A[[X]]$, et que c'est l'unique idéal maximal de $A[[X]]$. Montrer que l'application qui à $n \in \mathbf{N}$ associe $X^n \cdot A[[X]]$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur l'ensemble des idéaux de $A[[X]]$ distincts de l'idéal nul. Quels sont les idéaux premiers de $A[[X]]$?

Exercice 6

Soient A et B des anneaux.

1. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A et $\mathcal{J}$ un idéal de B. Montrer que $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ est un idéal de $A \times B$.
2. Décrire l'ensemble des idéaux de $A \times B$ en fonction de l'ensemble des idéaux de A et de l'ensemble des idéaux de B.
3. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\mathfrak{p} \times B$ est un idéal premier de $A \times B$.
4. Décrire l'ensemble des idéaux premiers de $A \times B$ en fonction de l'ensemble des idéaux premiers de A et de l'ensemble des idéaux premiers de B.

Exercice 7

Quelques exemples d'anneaux

1. On désigne par i un élément de $\mathbf{C}$ tel que $i^2 = -1$. Soit $\mathbf{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ défini par
$$\mathbf{Z}[i] = \{a + b\,i\}_{(a,b)\in\mathbf{Z}^2}.$$
   (a) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau intègre. Est-il isomorphe à $\mathbf{Z}^2$?

   (b) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{C}$ envoyant X sur i (*cf.* exercice 8).

   (c) Montrer que l'application
$$N\colon \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[i] & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ z & \longmapsto & z\overline{z} \end{array}$$
   est bien définie et vérifie
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{Z}[i]^2, \quad N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2).$$
   (d) Déterminer $\mathbf{Z}[i]^\times$.

2. Soit x un entier non nul. Soit $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ le sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ définit par
$$\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right] = \left\{\frac{a}{x^n}\right\}_{a\in\mathbf{Z},\, n\in\mathbf{N}}.$$
   (a) Comment appelle-t-on $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$?

   (b) Montrer que $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ est un anneau intègre contenant $\mathbf{Z}$.

   (c) Montrer que $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]$ est l'image de $\mathbf{Z}[X]$ par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ vers $\mathbf{Q}$ envoyant X sur $\frac{1}{x}$ (*cf.* exercice 8).

   (d) Déterminer $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{x}\right]^\times$.

3. Soit p un nombre premier et
$$\mathbf{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b}\right\}_{a\in\mathbf{Z},\, b\in\mathbf{Z}\setminus p\mathbf{Z}}.$$
   (a) Montrer que $\mathbf{Z}_{(p)}$ est un anneau intègre contenant $\mathbf{Z}$.

   (b) Déterminer $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$.

   (c) Montrer que l'idéal $p\cdot\mathbf{Z}_{(p)}$ est un idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$, et que c'est l'unique idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Montrer que l'application qui à $n \in \mathbf{N}$ associe $p^n \cdot \mathbf{Z}_{(p)}$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur l'ensemble des idéaux de $\mathbf{Z}_{(p)}$ distincts de l'idéal nul. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbf{Z}_{(p)}$?

4. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$.

   (a) Montrer que $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ est un anneau.

   (b) Déterminer les éléments inversibles de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$

   (c) Déterminer les éléments nilpotents (*cf.* exercice 10) de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$.

   (d) Déteminer les diviseurs de zéros de $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$. Est-ce un anneau intègre ?

5. Déterminer, à isomorphisme près, tous les anneaux dont le cardinal est inférieur ou égal à 4.

Exercice 8

1. Pour chacun des couples (A, B) d'anneaux ci-dessous, déterminer l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B)$ des morphismes d'anneaux de A vers B.

$$(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}), \quad (\mathbf{Z}, \mathbf{Q}), \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{Z}), \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}), \quad (\mathbf{Z}[i], \mathbf{Z}[i]) \quad (\textit{cf.}\ \text{exercice 7})$$

$$(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \quad (m, n \in \mathbf{N}), \quad (\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

2. Soit A un anneau. Soit $\iota \colon A \to A[X]$ l'application qui à $a \in A$ associe le polynôme constant a. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A[X], B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B) \times B \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi \circ \iota, \varphi(X)) \end{array}$$

est une bijection.

Exercice 9

Un anneau est dit *local* s'il possède un unique idéal maximal.

1. Vérifier qu'un corps est un anneau local.
2. Soit A un anneau. Montrer que A est local si est seulement si $A \setminus A^\times$ est un idéal de A.
3. Donner le plus possible d'exemples (dans l'idéal, une infinité) d'anneaux locaux non deux à deux isomorphes et qui ne sont pas des corps (on pourra tirer son inspiration d'autres exercices de cette feuille).

Exercice 10

Soit A un anneau. Un élément a de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif m tel que $a^m = 0$. L'anneau A est dit *réduit* s'il n'a pas d'éléments nilpotents non nuls.

1. Vérifier qu'un anneau intègre est réduit.
2. Soit n un entier positif. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
3. Donner un exemple d'anneau non intègre, non nul et réduit.
4. Soit a un élément nilpotent de A. Montrer que $1 + a$ est inversible. Soit $b \in A^\times$. Montrer que $b + a$ est inversible.
5. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A. On l'appelle le *nilradical de* A et on le note $\mathrm{Nil}(A)$. Montrer que l'anneau quotient $A/\mathrm{Nil}(A)$ est réduit.
6. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \subset \mathfrak{p}$.
7. (si vous connaissez le lemme de Zorn) Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A. Indication : soit $x \notin \mathrm{Nil}(A)$; considérer l'ensemble des idéaux de A qui ne rencontrent pas l'ensemble $\{x^m\}_{m \in \mathbf{N}}$.
8. Montrer qu'un élément de $A[X]$ est nilpotent si et seulement si ses coefficients sont des éléments de $\mathrm{Nil}(A)$. En déduire que $A[X]^\times = A^\times + \mathrm{Nil}(A[X])$.

9. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de A. Le *radical* de $\mathcal{I}$ est le sous-ensemble de A noté $\sqrt{\mathcal{I}}$ et défini par

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{a \in A, \quad \exists n \in \mathbf{N}, \quad a^n \in \mathcal{I}\}$$

   Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de A contenant $\mathcal{I}$ et contenu dans tout idéal premier contenant $\mathcal{I}$. Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}}$. Montrer que $A/\mathcal{I}$ est réduit si et seulement si $\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$.

10. Pour chacun des anneaux suivants, décrire le radical de chacun de ses idéaux : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (n entier positif), $\mathbf{K}[X]$ ($\mathbf{K}$ un corps).

Exercice 11

1. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
2. Montrer que tout anneau intègre ne possèdant qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.
3. Montrer que tout anneau non nul dont tous les idéaux propres sont premiers est un corps.