Université de Rennes 1 — Année universitaire 2017-2018

Licence de mathématiques – Module ANAR

Contrôle continu n°2

Mercredi 28 mars 2018, 17h15 – 18h15

La qualité de la rédaction et de l'argumentation entre dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier, *sauf mention expresse du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.* Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés.

Rappel : Soit A un anneau et $\mathcal{B} \in A[X]$ un polynôme non nul de coefficient dominant inversible ; alors pour tout $\mathcal{P} \in A[X]$, il existe $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \in A[X]$ tel que $\mathcal{P} = \mathcal{B}\mathcal{Q} + \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} = 0$ ou $\deg(\mathcal{R}) < \deg(\mathcal{B})$.

Question de cours

Soit $\mathbf{L}$ un corps, $\mathbf{K}$ un sous-corps fini de $\mathbf{L}$, q le cardinal de $\mathbf{K}$. Montrer que $\mathbf{K} = \{x \in \mathbf{L}, x^q = x\}$.

Exercice 1

Convaincre le correcteur en quelques lignes que vous savez décrire explicitement un corps à 9 éléments et (à l'aide de quelques exemples pertinents) y faire des calculs. *Aucune justification n'est demandée*, mais on introduira soigneusement les notations utilisées, et on ne négligera pas la présentation.

Exercice 2

Soit $\mathbf{K}$ un corps et A l'anneau quotient $\mathbf{K}[X,Y]/\langle X^2 - Y^3\rangle$. Soit x (respectivement y) l'image de X (respectivement Y) dans A.

1. Soit $\varphi\colon \mathbf{K}[X,Y] \to \mathbf{K}[T]$ l'unique morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres qui envoie X sur T^3 et Y sur T^2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle X^2 - Y^3\rangle$.
2. En déduire que A est un anneau intègre.
3. Soit $\pi\colon \mathbf{K}[X,Y] \to A$ le morphisme quotient. Justifier que le corps $\mathbf{K}$ est isomorphe à $\pi(\mathbf{K})$. On identifie désormais $\mathbf{K}$ et $\pi(\mathbf{K})$. Montrer que $A^\times = \mathbf{K}^\times$.
4. Montrer que x et y sont des éléments irréductibles de A.

Exercice 3

Soit A un anneau, $\mathcal{I}$ un idéal de A, S une partie multiplicative de A, $\iota\colon A \to S^{-1}A$ le morphisme de localisation.

1. Montrer que l'ensemble $\{\frac{a}{s}\}_{a\in\mathcal{I}, s\in S}$ est l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\iota(\mathcal{I})$; on le note $S^{-1}\mathcal{I}$.
2. Donner un exemple explicite où $\mathcal{I}$ est strictement inclus dans $\iota^{-1}(S^{-1}\mathcal{I})$.
3. Donner un exemple explicite où $\mathcal{I} \cap S = \varnothing$ et $\mathcal{I}$ est strictement inclus dans $\iota^{-1}(S^{-1}\mathcal{I})$.