Université de Rennes 1 Année universitaire 2017-2018
Licence de mathématiques – Module ANAR

Contrôle continu n°1
Mercredi 21 février 2018, 17h15 – 18h15

La qualité de la rédaction et de l'argumentation entrent dans une part importante de l'appréciation des copies ; en particulier toutes les réponses doivent être justifiées. Documents de cours, calculatrices, téléphones portables et assimilés ne sont pas autorisés. Les questions jugées plus difficiles sont précédées d'un **(*)**.

Question de cours

Soit A un anneau et $\mathcal{I}$ un idéal de A. Montrer que l'anneau quotient $A/\mathcal{I}$ est un corps si et seulement si $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de A.

Exercice 1

Soit $\mathbf{K}$ un corps. Combien d'idéaux l'anneau $\mathbf{K}[X]/\langle X^4 - X^2\rangle$ possède-t-il ?

Exercice 2

Soit A un anneau et $e \in A$. On dit que e est un *idempotent non trivial* si $e^2 = e$ et $e \notin \{1_A, 0_A\}$.

1. Déterminer la liste des idempotents non triviaux de A dans les cas suivants : $A = \mathbf{Z}$, $A = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (p premier, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$), **(*)** $A = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ($n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$).
2. Soit e un idempotent non trivial de A. Montrer que l'idéal eA est propre.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe des anneaux B et C *non nuls* tels que A est isomorphe à $B \times C$;
   (b) il existe des idempotents non triviaux $e, f \in A$ tels que $e + f = 1_A$.
   Indication : Considérer A/eA.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation
$$x^3 = 3, \quad x \in A$$
pour les anneaux A suivants : $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/5^2\mathbf{Z}$.
2. **(*)** Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ et p un nombre premier. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{Z}$ tel que
$$P(a) = 0 \pmod{p\mathbf{Z}} \quad \text{et} \quad P'(a) \neq 0 \pmod{p\mathbf{Z}}.$$
Montrer que pour tout entier strictement positif n, il existe un unique élément $a_n \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ tel que
$$P(a_n) = 0 \pmod{p^n\mathbf{Z}} \quad \text{et} \quad a_n = a \pmod{p\mathbf{Z}}.$$
3. **(**), hors barême.** Soit A un anneau et $\mathcal{I}$ un idéal de A. Soit $P \in A[X]$. On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que $P(a) = 0 \pmod{\mathcal{I}}$ et l'image de $P'(a)$ dans $A/\mathcal{I}$ est inversible. Montrer que pour tout entier strictement positif n, il existe un unique élément $a_n \in A/\mathcal{I}^n$ tel que
$$P(a_n) = 0 \pmod{\mathcal{I}^n} \quad \text{et} \quad a_n = a \pmod{\mathcal{I}}.$$